



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA  
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE BOM JESUS DA LAPA  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**VAGNER ROCHA SILVA**

**PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE CINEMÁTICA DE  
MECANISMOS ARTICULADOS PLANOS DE QUATRO BARRAS**

**BOM JESUS DA LAPA**

**2022**

**VAGNER ROCHA SILVA**

**PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE CINEMÁTICA DE  
MECANISMOS ARTICULADOS PLANOS DE QUATRO BARRAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia Mecânica, do Centro Multidisciplinar de Bom Jesus da Lapa, da Universidade Federal do Oeste da Bahia.

**ORIENTADOR: PROF. RODRIGO DA PAIXÃO ESTRELA**

**BOM JESUS DA LAPA**

**2022**

**VAGNER ROCHA SILVA**

**PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE CINEMÁTICA DE  
MECANISMOS ARTICULADOS PLANOS DE QUATRO BARRAS**

**TCC**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia Mecânica, do Centro Multidisciplinar de Bom Jesus da Lapa, da Universidade Federal do Oeste da Bahia, para aprovação no componente curricular de Trabalho de Conclusão de Curso.

Bom Jesus da Lapa, 16 de Dezembro de 2022.

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou este Projeto:

---

**Prof. Rodrigo da Paixão Estrela, Presidente**

**Universidade Federal do Oeste da Bahia**

---

**Prof. Me. Rafael Almeida Bittencourt**

**Universidade Federal do Oeste da Bahia**

---

**Prof. Me. Filipi Marques de Souza**

**Universidade Federal do Oeste da Bahia**

## LISTA DE SÍMBOLOS

$r_1$	Comprimento da ligação (1) – [Equivalente a $r_1$ ]
$r_2$	Comprimento da ligação (2) – [Equivalente a $r_2$ ]
$r_3$	Comprimento da ligação (3) – [Equivalente a $r_3$ ]
$r_4$	Comprimento da ligação (4) – [Equivalente a $r_4$ ]
$\theta_2$	Ângulo de posição referente à ligação (2) – [Equivalente a $A_2$ ]
$\theta_3$	Ângulo de posição referente à ligação (3) – [Equivalente a $A_3$ ]
$\theta_4$	Ângulo de posição referente à ligação (4) – [Equivalente a $A_4$ ]
$\gamma$	Ângulo de transmissão – [Equivalente a $YY$ ]
$A$	Par cinemático das ligações (2) e (3)
$B$	Par cinemático das ligações (3) e (4)
$O_2$	Par cinemático das ligações (1) e (2)
$O_4$	Par cinemático das ligações (4) e (1)
$z$	Distância entre $O_2$ e $O_4$ – [Equivalente a $Z$ ]
$\dot{\theta}$	Primeira derivada do ângulo em função do tempo
$\ddot{\theta}$	Segunda derivada do ângulo em função do tempo
$\alpha$	Ângulo de posição referente à ligação (1)
$h$	Distância vertical entre os pares cinemáticos da ligação (1) – [Equivalente a $H$ ]
$\omega_2$	Velocidade angular da ligação (2) – [Equivalente a $W_2$ ]
$\omega_3$	Velocidade angular da ligação (3) – [Equivalente a $W_3$ ]
$\omega_4$	Velocidade angular da ligação (4) – [Equivalente a $W_4$ ]
$\Delta\theta_3$	Varição de $\theta_3$ – [Equivalente a $DA_3$ ]
$\Delta\theta_4$	Varição de $\theta_4$ – [Equivalente a $DA_4$ ]
$\theta'_3$	Correção de palpite para o ângulo $\theta_3$ – [Equivalente a $D_{DA_3}$ ]
$\theta'_4$	Correção de palpite para o ângulo $\theta_4$ – [Equivalente a $D_{DA_4}$ ]
$\dot{\theta}_3$	Coefficiente cinemático referente à primeira derivada do ângulo $\theta_3$ em função de $\theta_2$ – [Equivalente a $A_3I$ ]
$\dot{\theta}_4$	Coefficiente cinemático referente à primeira derivada do ângulo $\theta_4$ em função de $\theta_2$ – [Equivalente a $A_4I$ ]
$\ddot{\theta}_3$	Coefficiente cinemático referente à segunda derivada do ângulo $\theta_3$ em função de $\theta_2$ – [Equivalente a $A_3II$ ]

$\ddot{\theta}_3$	Coeficiente cinemático referente à segunda derivada do ângulo $\theta_4$ em função de $\theta_2$ – [Equivalente a A4ll]
$B_1$	Termo de simplificação da Equação (30) – [Equivalente a B1]
$B_2$	Termo de simplificação da Equação (31) – [Equivalente a B2]
$\alpha_2$	Aceleração angular da ligação (2) – [Equivalente a S2]
$\alpha_3$	Aceleração angular da ligação (3) – [Equivalente a S3]
$\alpha_4$	Aceleração angular da ligação (4) – [Equivalente a S4]
$P$	Ponto de referência
$V_p$	Velocidade em um dado ponto $P$
$V_0$	Velocidade na origem do sistema móvel $xy$
$V$	Velocidade relativa entre o ponto e a origem do movimento
$\omega_0$	Velocidade angular na origem do sistema móvel
$R$	Distância entre a origem do sistema móvel $xy$ e o ponto $P$
$A_p$	Aceleração em um dado ponto $P$
$A_0$	Aceleração na origem do sistema móvel $xy$
$A$	Aceleração relativa entre o ponto e a origem do movimento
$F1$	Decomposição da soma vetorial do mecanismo genérico com relação a X
$F2$	Decomposição da soma vetorial do mecanismo genérico com relação a Y
$dF1dA3$	Derivada parcial de F1 em função do ângulo A3
$dF1dA4$	Derivada parcial de F1 em função do ângulo A4
$dF2dA3$	Derivada parcial de F2 em função do ângulo A3
$dF2dA4$	Derivada parcial de F2 em função do ângulo A4

## RESUMO

SILVA R., Vagner. **PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE CINEMÁTICA DE LIGAÇÕES PLANARES DE QUATRO BARRAS**. 2022. TCC – Universidade Federal do Oeste da Bahia, Bom Jesus da Lapa, 16 de dezembro de 2022.

Este projeto trata do estudo e desenvolvimento de um procedimento computacional especialmente desenvolvido para a análise cinemática de ligações planas de quatro barras. Para sua execução, os links foram modelados como barras rígidas de dimensões fornecidas pelo usuário, conectadas por pares cinemáticos de pinos, cujas posições relativas também são inseridas como dados de entrada. Através das variáveis de entrada informadas pelo usuário, ou seja, toda a configuração geométrica do sistema, o programa irá retornar valores cinemáticos de relevância na análise de mecanismos, tais como posição, velocidade angular, aceleração angular e ângulos de transmissão. As equações analíticas apresentadas são baseadas na geometria do mecanismo de quatro barras e serão resolvidas numericamente. O programa foi validado com problemas de literatura, e sua aplicabilidade inclui mecanismos especiais, como a ligação de Watt e a ligação de Chebyshev, entre outros. Esta ferramenta será útil nas aulas Cinemática de Mecanismos dos cursos de graduação, permitindo uma análise mais fácil da influência das variáveis de entrada nos resultados obtidos, o que a torna um excelente ponto de partida em projetos de mecanismos mais complexos.

Palavras-chave: Mecanismos. Cinemática. Ligações de Quatro Barras. Análise Computacional.

## ABSTRACT

SILVA R., Vagner. **PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE CINEMÁTICA DE LIGAÇÕES PLANARES DE QUATRO BARRAS**. 2022. TCC – Universidade Federal do Oeste da Bahia, Bom Jesus da Lapa, 16 de dezembro de 2021.

This project deals with the study and development of a computational procedure specially developed for the kinematic analysis of four-bar plane connections. For its execution, the links were modeled as rigid bars with dimensions provided by the user, connected by kinematic pairs of pins, whose relative positions are also inserted as input data. Through the input variables informed by the user, that is, the entire geometric configuration of the system, the program will return kinematic values of relevance in the analysis of mechanisms, such as position, angular velocity, angular acceleration, and transmission angles. The presented analytical equations are based on the geometry of the four-bar linkage and will be solved numerically. The program was validated with literature problems, and its applicability includes special mechanisms, such as Watt binding and Chebyshev binding, among others. This tool will be useful in the Kinematics of Mechanisms classes in undergraduate courses, allowing an easier analysis of the influence of input variables on the obtained results, which makes it an excellent starting point in projects of more complex mechanisms.

Keywords: Mechanisms. Kinematics. Four-bar Linkages. Computational Analysis.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Cadeias cinemáticas. (a) Cadeia aberta; (b) Cadeia fechada.	16
Figura 2 – Pantógrafo.	17
Figura 3 - Comportamento da montagem. (a) Mecanismos; (b) estruturas; (c) estruturas pré-carregadas.	18
Figura 4 - Juntas com movimento longitudinal. (a) Juntas de translação; (b) Pino em ranhura.	19
Figura 5 - Juntas Pinadas. (a) Junta de primeira ordem; (b) Junta de segunda ordem.	19
Figura 6 - Para-brisa automotivo. (a) Mecanismo articulado; (b) Diagrama cinemático.	20
Figura 7 - Categorias dos mecanismos. (a) Dupla manivela; (b) Manivela-balancim; (c) Duplo balancim; (d) Dupla manivela (Caso especial); (e) Balancim triplo.	21
Figura 8 - Análise de posição. (a) Mecanismo articulado; (b) Mecanismo na forma vetorial.	22
Figura 9 - Mecanismo genérico.	25
Figura 10 - Casos que impedem a análise. (a) $s + l + p < q$ ; (b) $s + l - p > q$ ; (c) $s + q + p < l$ ; (d) $s + q - p < l$ .	26
Figura 11 - Mecanismo genérico com diferença de altura.	27
Figura 12 – Demonstração do Sistema móvel xy.	30
Figura 13 – Exemplo para Validação – (Figura P7-8b)	36
Figura 14 – Caso 1 - Input	37
Figura 15 – Caso 2 - Input	38
Figura 16 – Caso 3 - Input	38
Figura 17 – Caso 4 - Input	39
Figura 18 – Caso 1 - Resultados	40
Figura 19 – Caso 3 - Resultados	41
Figura 20 – Caso 2 - Resultados	42
Figura 21 – Caso 4 – Resultados	42
Figura 22 – Caso 4 – Primeiras Iterações	43
Figura 23 – Mecanismo genérico com link fixo na horizontal	53
Figura 24 – Mecanismo genérico com diferença de altura entre as extremidades do link fixo	53

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	10
1.1	Objetivos	12
1.1.1	Objetivo geral	12
1.1.2	Objetivos específicos	12
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	13
2.1	Estado da Arte	13
2.2	Mobilidade de mecanismos articulados planos	15
2.3	Ligações (links) e pares cinemáticos	18
2.4	Mecanismos de Quatro Barras e Lei de Grashof	19
2.5	Análise Cinemática para Mecanismos de Quatro Barras	22
<b>3</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b>	25
3.1	Mecanismo genérico de quatro barras	25
3.2	Análise de posição	26
3.3	Análise de velocidade angular	28
3.4	Análise de aceleração angular	29
3.5	Análise de velocidade e aceleração por cálculo vetorial	30
3.6	Linguagem de Programação	31
3.7	Python	32
3.8	PyCharm	33
<b>4</b>	<b>DESENVOLVIMENTO DO CÓDIGO</b>	34
4.1	Bibliotecas e Funções Python	34
4.2	Lógica de Implementação	35
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	36
5.1	Validação do Código	36
5.2	Resolução	39
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	44
	<b>REFERÊNCIAS</b>	45
	<b>APÊNDICE A – CÓDIGO PARA ANÁLISE CINEMÁTICA</b>	47
	<b>APÊNDICE B – INFORMAÇÕES PERTINENTES AO USUÁRIO DO CÓDIGO</b>	53

## 1 INTRODUÇÃO

Uma das preocupações da humanidade sempre foi a de buscar soluções que facilitassem o trabalho realizado pelo homem. Em muitos casos, a necessidade da substituição do trabalho braçal pelo trabalho realizado por uma máquina, tem explicado o grande interesse por mecanismos. As grandes guerras registradas na história mundial também impulsionaram a busca por armamentos que sempre envolveram mecanismos, dos mais diversos tipos possíveis. De acordo com Hartenberg e Denavit (1964), um dos primeiros relatos que se tem registrado da utilização da palavra máquina foi de 28 a.C, pelo engenheiro grego Vitruvius, que na oportunidade definiu máquina como um conjunto de madeiras e juntas eficaz no movimento de pesos.

Hoje, sabe-se que máquina e mecanismo são duas palavras com significados distintos. Norton (2010) define mecanismo como um sistema de elementos unidos e organizados capaz de converter, de maneira predeterminada, um movimento qualquer em um movimento ordenado, onde, na maioria das vezes, gera forças de baixa intensidade e transmite pouca potência. Assim, Mecanismo é um conjunto de corpos rígidos interconectados capazes de realizar movimento relativo. O termo máquina, por sua vez, está associado ao uso e transformação de força, envolvendo níveis significativos de energia e potência. Pode-se ainda adicionar que toda máquina é composta por um ou mais mecanismos.

Os mecanismos de quatro barras são sistemas articulados com grande grau de aplicação. Como o nome já diz, esse tipo de mecanismo é formado por quatro ligações, sendo uma delas estacionária (solo), outra responsável pela atividade motriz (entrada do movimento), e duas movidas: a intermediária (biela ou acoplador) e outra responsável pela saída do movimento, normalmente conhecida como seguidor ou balancim. Tais características aliadas às diferentes relações geométricas entre as barras e às diferentes configurações para os movimentos de entrada e de saída, explicam a popularidade desse mecanismo (FLORES; CLARO, 2007).

O estudo da Mecânica dos Corpos Rígidos pode ser dividido em duas partes, sendo elas: a Cinemática e a Dinâmica. De acordo com Beer e Johnson (1991), a Cinemática é a subárea que trata da geometria do movimento de um corpo, pois está relacionada com a posição, velocidade, aceleração e tempo, sem se preocupar com a origem do movimento. Já a Dinâmica, por outro lado, busca estudar as relações entre as forças que agem em um dado corpo e o seu movimento, seja para se prever o movimento causado pela aplicação de forças, ou até mesmo para determinar as forças necessárias para a realização de um movimento específico.

Quando se projeta uma máquina, precisa-se definir os tipos de mecanismos que compõem a máquina e o movimento realizado por cada um deles. Esta análise, cinemática por natureza, é realizada antes da análise dinâmica do mecanismo. É por isso que o estudo da cinemática de sistemas articulados é de grande relevância para diversos dispositivos que necessitam estabelecer assertividade nos seus movimentos. Adiciona-se que para sistemas que transmitem potências quase desprezíveis, como alguns mecanismos de quatro barras, a resistência das peças não é o principal problema e, com isso, o aspecto cinemático passa a ser o principal fator para dimensionamento (MABIE; OCVIRK, 1980).

A não-linearidade das equações algébricas obtidas para análise cinemática de mecanismos planos articulados é uma limitação para apresentação dos resultados das análises com certa velocidade. O advento de computadores equipados com processadores mais poderosos permitiu que diversos problemas de engenharia fossem analisados por intermédio de sistemas computacionais e programação numérica.

Um algoritmo é composto por uma série de operações lógicas que são executadas a partir de dados de entrada (*input*), e que retornam informações (*output*) mediadas por uma sequência de instruções preestabelecidas. Sendo operadas de maneira sistemática e convertendo a linguagem computacional em linguagem de máquina.

Para objeto desse estudo, a linguagem definida para a aplicação foi a linguagem Python. Por ser mais acessível e com grande relevância no mercado atual. Em um código elaborado com a linguagem Python, as operações são executadas linha por linha, sendo compostas por variáveis e comandos de repetição. As variáveis mais comumente aplicadas são do tipo inteiro, real, texto e lógico. Podendo ser definidas por meio do input, ou por uma sequência lógica dentro do código. Os comandos de repetição, por sua vez, se baseiam no uso de funções como “*For*” e “*While*”, que são recursos utilizados em tarefas repetitivas, em que o loop é executado até que uma condição seja satisfeita.

Tais estruturas possibilitam a criação de algoritmos capazes de contemplar múltiplas situações. Desse modo, entende-se que a utilização de programas computacionais para trazer soluções da cinemática de mecanismos é algo viável e extremamente relevante, uma vez que esse tipo de análise é feita por métodos iterativos, no qual se realizado de maneira manual, demanda mais tempo para a apresentação de soluções, postergando a tomadas de decisões em projetos.

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo geral

Desenvolver um procedimento computacional para análise cinemática de ligações planas de quatro barras, capaz de resolver sistemas de equações preestabelecidas e retornar valores cinemáticos de relevância na análise de mecanismos.

### 1.1.2 Objetivos específicos

- Desenvolver uma rotina computacional capaz de determinar posição, velocidade angular e aceleração angular de mecanismos planos geométricos de quatro barras;
- Apresentar uma ferramenta útil para validação de exercícios no meio acadêmico e que sirva de apoio para as aulas de cinemática na disciplina de Mecanismos;
- Destacar a importância da computação na solução de projetos de engenharia para a melhor visualização das soluções e na economia de tempo.

Diante do cenário e do papel social, este trabalho mostra-se útil em aulas de Cinemática de Mecanismos de cursos de graduação, permitindo uma análise mais fácil da influência das variáveis de entrada nos resultados obtidos, o que a torna um excelente ponto de partida em projetos de mecanismos mais complexos.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Estado da Arte

Os mecanismos de quatro barras são um dos sistemas articulados mais populares, sendo encontrados nos mais diversos dispositivos mecânicos. Por serem mecanismos de construção simples e de grande versatilidade a nível de aplicações, é descrito na literatura de forma extensa, tanto na área da engenharia, quanto em áreas como a biomecânica e a robótica.

Nesse sentido, Liu, Zheng e Li (2017), desenvolveram uma mão robótica humanoide com o intuito de melhorar o desempenho operacional de robôs, sendo feito o acoplamento de ligações de quatro barras ao mecanismo de transmissão de cada dedo. Por possuir uma estrutura compacta e possibilitar boa força de saída, a utilização desse modelo se torna muito vantajosa, contudo, exige uma alta precisão de montagem, e deve ser cuidadosamente tratado na análise cinemática.

Os resultados da simulação mostraram que as velocidades das articulações dos dedos atenderam as configurações de agarramento da mão humana e satisfizeram os requisitos de projeto da mão robótica. Os resultados do experimento mostraram que a forma e os parâmetros dos dedos foram razoáveis, e a mão do robô humanoide foi projetada com boa manipulabilidade e aplicabilidade (LIU, ZHENG e LI, 2017).

Os métodos de análises cinemática desses mecanismos são os mais diversos, no entanto, os métodos de análise computacional vêm ganhando relevância nos últimos anos, devido aos avanços tecnológicos, propiciando a obtenção de resultados confiáveis em um menor tempo.

Partindo desse contexto, Bošković, et. al (2018) desenvolveram uma técnica de otimização do balanceamento dinâmico de um mecanismo de quatro barras, com o objetivo de minimizar as reações das articulações, forças e momentos instáveis. O método de análise computacional desenvolvido para aplicação em cadeias cinemáticas planas articuladas, baseou-se no uso de ângulos de rotação absolutos, sendo capaz de determinar as forças de reações atuantes no sistema. Os parâmetros cinemáticos e dinâmicos dos mecanismos de quatro barras foram tomados como variáveis de projeto. Assim, o algoritmo utilizado mostrou-se eficiente e apresentou resultados satisfatórios.

Os mecanismos de quatro barras também podem ser classificados como mecanismos complexos, quando tem sua aplicação estendida ao desenvolvimento de mecanismos espaciais. Um exemplo dessa abordagem é o estudo de Kim J.-W., Lee, Seo e Kim J. (2018), que criaram um modelo alternativo para um mecanismo de transmissão rotacional, que converte o movimento rotativo contínuo em movimento circular intermitente, de um trocador de

ferramenta automático sem servo motor. Esse modelo criado faz uso de dois mecanismos de quatro barras ligados a uma base, na qual as ligações de quatro barras foram projetadas em um algoritmo de síntese baseado na derivada da trajetória do alvo. Tanto a forma quanto a relação de velocidade da trajetória da articulação de quatro barras foram consideradas.

Um protótipo do mecanismo de transmissão proposto foi criado e implementado em uma máquina real, sendo realizados experimentos para verificar a viabilidade do mecanismo. Nesse estudo, os resultados mostraram que o mecanismo funcionou bem, sendo viável para estudos cinemáticos.

Sun, Liu e Chu (2018) desenvolvem uma aplicação espacial desses mecanismos, e realizaram um estudo para analisar as características geométricas de um mecanismo espacial, usando parâmetros de wavelet. Quando comparada com mecanismos planos de quatro barras, a estrutura dos mecanismos espaciais apresentou maior complexidade, o que justifica a aplicação em garras esféricas, asas de micro veículos aéreos, punhos robóticos e robôs cirúrgicos.

No projeto, foi estabelecido um modelo matemático para a curva do acoplador da articulação esférica de quatro barras por meio do sistema de coordenadas esféricas. Partindo dessa premissa, os resultados do estudo mostraram que o método proposto é eficaz para a geração de caminho aberto de ligações esféricas de quatro barras, evitando a resolução de equações não lineares e problemas de ramificação. Além disso, o método proposto também é capaz de fornecer valores iniciais para métodos de otimização (SUN, LIU e CHU, 2018).

Dentre as diversas aplicações, os mecanismos de quatro barras são utilizados em diversos componentes automotivos. Um exemplo dessa aplicação está o estudo de Yildiz, A. (2021), que propôs uma síntese paramétrica dos dois mecanismos mais aplicados para tampas do porta-malas de veículos sedan, sendo a barra de torção e os acionados por mola a gás. Ambos os sistemas se baseiam no princípio de mecanismos de quatro barras e, para o estudo, as equações cinemáticas dos mecanismos foram derivadas e implementadas para uma análise quase estática, a fim de determinar as forças motrizes necessárias para o seu levantamento. Os comprimentos e os ângulos iniciais da articulação de quatro barras foram otimizados a fim de minimizar a diferença entre o valor desejado e o calculado para a força da mão.

Os resultados indicaram que o procedimento de projeto proposto foi capaz de fornecer um mecanismo para tampa de porta-malas no qual o valor da força motriz a cada ângulo de abertura foi alcançado. Também foi observado que as técnicas de otimização apresentaram diferentes desempenhos, fornecendo diferentes soluções ótimas para cada caso abordado. O

processo automatizado para os mecanismos da tampa do porta-malas é de extrema importância para o fabricante (YILDIZ, 2021).

Na área da robótica, em um estudo de caso, Zhao, D. et. al (2021) observaram que a locomoção de robôs saltadores exige uma rápida extensão da perna robótica no momento da subida, o que causa um incremento contínuo da velocidade do cilindro propulsor sobre a geometria de fixação, gerando grande queda de pressão e baixa eficiência energética no modelo. Com isso, propuseram uma nova geometria de fixação do cilindro, com mais parâmetros de projeto, para um robô de uma única perna. Essa nova geometria usou um mecanismo de quatro barras para conectar a haste do cilindro à tíbia do robô, melhorando a eficiência e aperfeiçoando o movimento do sistema.

Os modelos matemáticos, cinemáticos e dinâmicos do robô biônico foram construídos para calcular o processo do salto quando o robô deixa o solo. Com base nos modelos dinâmicos estabelecidos, os parâmetros dos propostos foram otimizados para maximizar a altura do salto.

## **2.2 Mobilidade de mecanismos articulados planos**

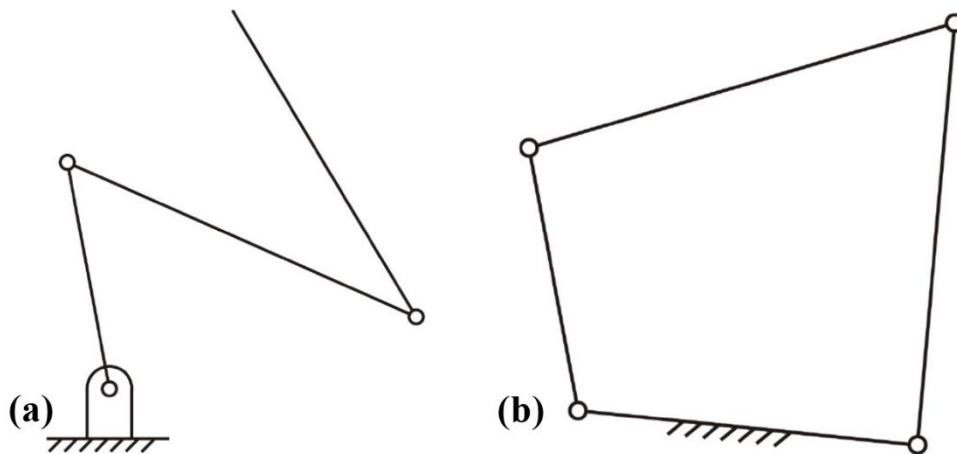
Uma das principais preocupações na análise de um mecanismo está relacionada à mobilidade, podendo ser classificada de acordo com o número de graus de liberdade (GDL) do sistema. Para Norton (2010), os GDL são equivalentes à quantidade de coordenadas independentes necessárias para determinar certa posição em qualquer instante. Desse modo, para se determinar a mobilidade de um mecanismo, é preciso considerar o número de ligações e juntas existentes, e sua forma de interação.

Em um sistema cinemático plano (2D), as posições dos corpos rígidos (links ou ligações) podem variar de acordo com três tipos de movimentos, sendo eles rotação pura, translação pura e movimento complexo. Na rotação pura, a ligação apresenta apenas movimento angular em torno de um ponto estacionário. Na translação pura, não há mudança de orientação do elo, uma vez que todos os pontos do corpo descrevem trajetórias paralelas entre si. Já o movimento complexo é uma combinação simultânea de rotação e translação, havendo tanto variação linear, quanto angular nos pontos. No geral, um corpo livre apresentará movimento complexo (Norton, 2010).

Um conjunto de ligações conectadas por articulações e que possuem a capacidade de realizar movimento relativo é chamado de cadeia cinemática. Essas cadeias podem ser categorizadas em abertas e fechadas. De acordo com Carvalho, Ibrahim e Coelho (2018), as cadeias cinemáticas abertas (Figura 1a) são formadas por um conjunto de corpos conectados

em série, recebendo a denominação de estrutura serial. Fisicamente, após se partir de uma posição inicial de uma das ligações da cadeia em direção a outra posição subsequente, não é possível retornar à posição inicial seguindo a mesma trajetória. Para isso, é preciso inverter o sentido da direção e seguir o mesmo percurso. Nas cadeias cinemáticas fechadas (Figura 1b), por outro lado, essa inversão de sentido não se faz necessária, pois é possível sair de uma posição inicial de uma ligação da cadeia e voltar a ela seguindo o mesmo percurso inicial. As cadeias fechadas também são denominadas de estruturas paralelas. Um mecanismo pode possuir uma ou mais cadeias em sua estrutura. Desse modo, nos casos em que a estrutura possuir cadeias cinemáticas abertas e fechadas, ela é denominada cadeia cinemática híbrida.

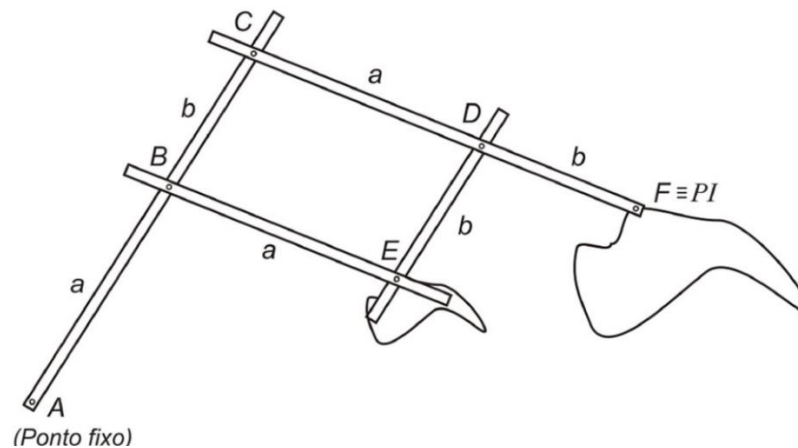
Figura 1 - Cadeias cinemáticas. (a) Cadeia aberta; (b) Cadeia fechada.



Fonte: (CARVALHO, IBRAHIM E COELHO, 2018).

A análise de movimento de um mecanismo pode estar relacionada ao estudo da posição e/ou da orientação de um elemento de interesse da cadeia cinemática. No caso do pantógrafo, instrumento utilizados para ampliar ou reduzir a escala de uma curva, como mostra a Figura 2, deseja-se conhecer a posição. Já em outros casos, como o de mecanismos utilizados no controle da inclinação das pás de helicópteros, o interesse é na orientação. Também existem casos em que tanto a posição, quanto a orientação são de interesse, como em robôs manipuladores utilizados em montagens mecânicas, que necessitam de ambos os movimentos para emprego de sua ferramenta (CARVALHO, IBRAHIM E COELHO, 2018).

Figura 2 – Pantógrafo.



Fonte: (CARVALHO, IBRAHIM E COELHO, 2018).

Com base em seu estudo dos mecanismos e dos graus de liberdade, o alemão Martin Gruebler desenvolveu uma equação capaz de determinar a mobilidade de um mecanismo plano. A Equação foi posteriormente modificada por John Kutzbach sendo representada na Equação (1).

$$M = 3(L - 1) - 2f_1 - f_2 \quad (1)$$

Em que, para mecanismos planos:

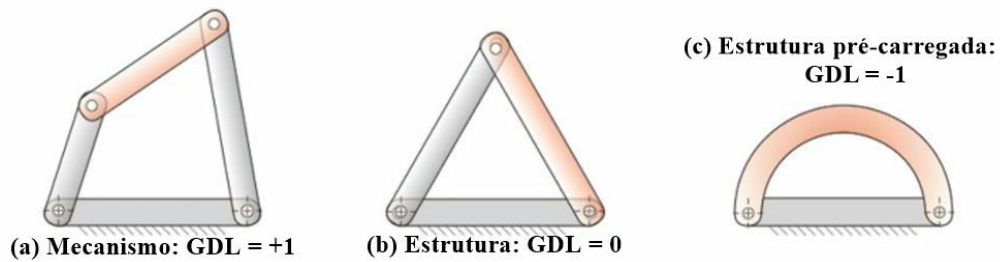
$L$  = Número de ligações;

$f_1$  = Número de pares cinemáticos com 1 GDL (pares cinemáticos inferiores);

$f_2$  = Número de pares cinemáticos com 2 GDL (pares cinemáticos superiores).

Os graus de liberdade são capazes de definir o comportamento de uma cadeia cinemática, visto que só existem três possibilidades: Se o GDL for positivo, a montagem será um mecanismo, e os elos apresentarão movimento relativo, como mostra a Figura 3a; Se o GDL for zero, ela será uma estrutura, não sendo possível a realização de movimento, como na Figura 3b; Se o GDL é negativo, a montagem também será uma estrutura, porém de natureza hiperestática, como pode ser visto na Figura 3c (NORTON, 2010).

Figura 3 - Comportamento da montagem. (a) Mecanismos; (b) estruturas; (c) estruturas pré-carregadas.



Fonte: (Norton, 2010).

### 2.3 Ligações (links) e pares cinemáticos

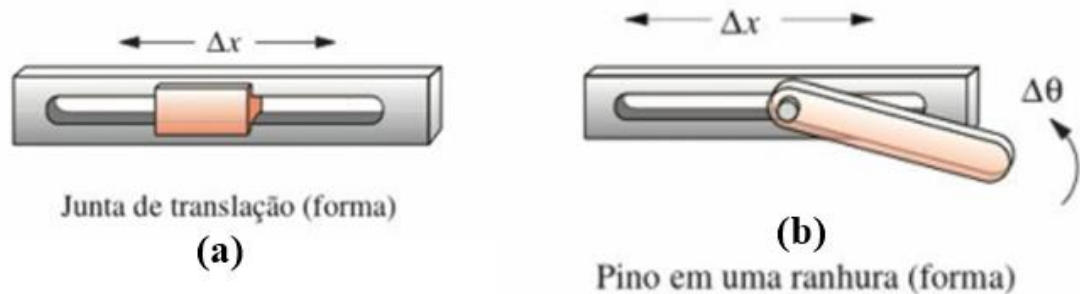
Ligações e pares cinemáticos são elementos base para a construção de qualquer mecanismo. Norton (2010), define ligação como um corpo rígido que possui ao menos dois nós (pontos de conexão entre os elos). Com relação aos nós, as ligações podem ser classificadas como: Ligações binárias, que possuem dois nós; ligações terciárias, que possuem três nós; ligações quaternárias, que possuem quatro nós.

Já os pares cinemáticos são definidos como os elementos de vínculo entre as ligações, e permitem, obviamente, movimento relativo entre as ligações. Podem ser classificadas de acordo com o tipo de contato entre os elementos, linha, ponto ou superfície; o número de graus de liberdade permitido, o tipo de fechamento físico da junta (tanto força como forma fechada) e o número de ligações unidas (ordem da junta).

Os termos “par inferior” e “par superior” foram criados por Franz Reuleaux para descrever juntas com superfície de contato (como um pino envolvido por um furo) e juntas com ponto ou linha de contato, respectivamente (Norton, 2010). Para mecanismos planos, pares cinemáticos inferiores permitem 1 movimento relativo, enquanto pares cinemáticos superiores permitem 2 movimentos relativos.

A Figura 4 mostra dois exemplos de pares cinemáticos. Na Figura 4a, é apresentado um par inferior; a figura 4b apresenta um par superior, este com grau de liberdade de rotação e outro de translação.

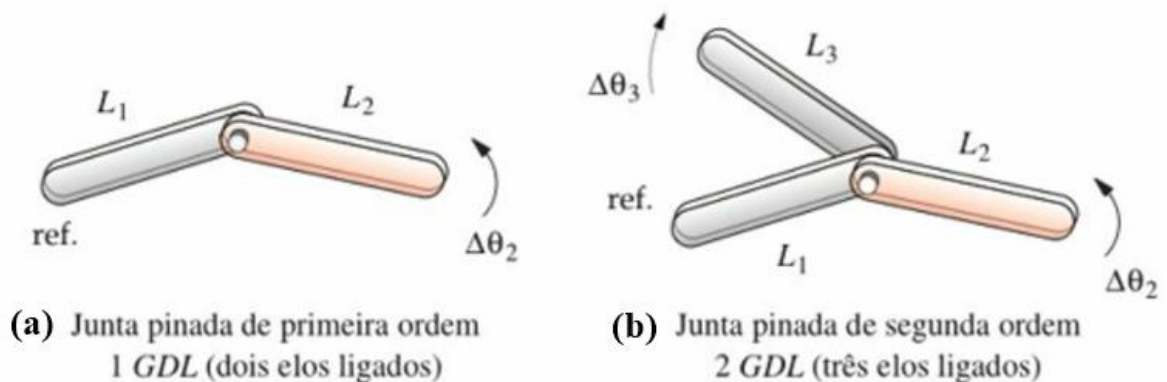
Figura 4 - Juntas com movimento longitudinal. (a) Juntas de translação; (b) Pino em ranhura.



Fonte: (Norton, 2010).

A Figura 5 mostra que ordem do par cinemático é igual ao número de ligações menos 1. Na Figura 5a, pode ser visto dois elos conectados, permitindo, portanto, 1 grau de liberdade; na Figura 5b, existem três elos conectados, o que permite 2 graus de liberdade.

Figura 5 - Juntas Pinadas. (a) Junta de primeira ordem; (b) Junta de segunda ordem.



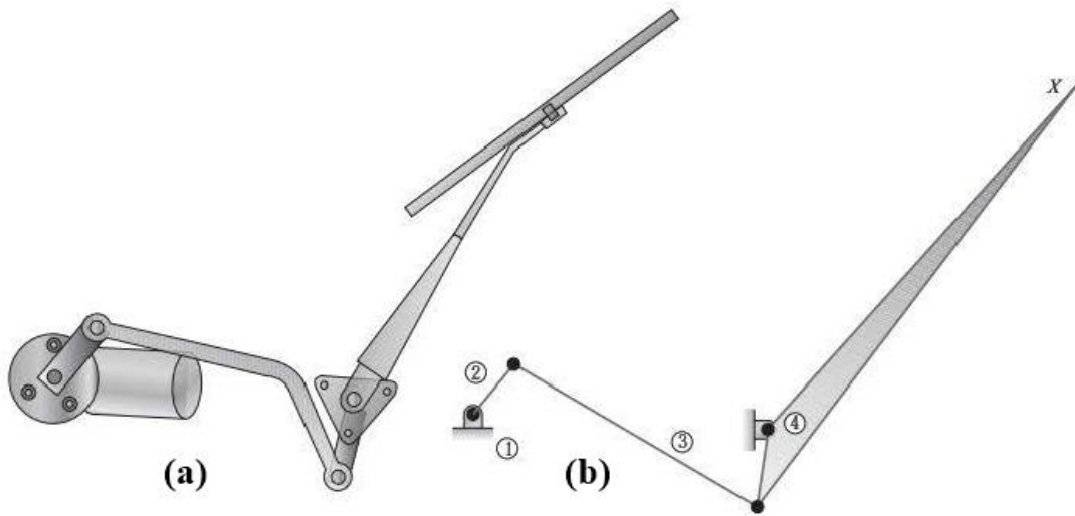
Fonte: (NORTON, 2010).

## 2.4 Mecanismos de Quatro Barras e Lei de Grashof

Os mecanismos de quatro barras são encontrados com muita frequência em diversas aplicações. Isso se deve à sua construção simples de quatro links binários conectados por quatro articulações, sendo um desses link incapaz de se mover.

Myszka (2012), demonstra essa mobilidade a partir de um mecanismo de quatro barras aplicado a um limpador de para-brisa automotivo, que pode ser visto na Figura 6, a seguir.

Figura 6 - Para-brisa automotivo. (a) Mecanismo articulado; (b) Diagrama cinemático.



Fonte: (MYSZKA, 2012).

Ao observar o diagrama cinemático, é possível afirmar que o sistema, de fato, se comporta como um mecanismo de quatro barras, uma vez que o comprimento dos links pode ser entendido como a distância entre as juntas para uma análise vetorial, independentemente do seu formato.

Sendo:  $L = 4$ ;  $f_1 = 4$ ;  $f_2 = 0$ . Ao aplicar a Equação (1), foi possível determinar o valor da mobilidade. Dessa forma, o mecanismo de quatro barras apresenta apenas um grau de liberdade.

$$M = 3(4 - 1) - 2 \times 4 - 0 = 1$$

Logo, por possuir um grau de liberdade, esse tipo de mecanismo é operado por um único atuador. Nesse exemplo, a ligação (1) representa a barra fixa, e o sistema é ativado por um motor elétrico de corrente contínua, conectado à ligação de entrada (2). A ligação (3) é o responsável pela transmissão do movimento do link de entrada para o link de saída (4), também classificado como seguidor (MYSZKA, 2012).

Para aplicações desse tipo, saber se os elos são capazes de realizar o movimento desejado é a base para o correto funcionamento do mecanismo. Nesse sentido, a Lei de Grashof deve ser utilizada para estudo do movimento desse mecanismo planar de quatro barras. De acordo com Myszka (2012), para que um mecanismo de quatro as barras tenha movimento relativo contínuo entre pelo menos duas ligações, a Lei de Grashof determina que a Equação (2) seja atendida.

$$s + l \leq p + q \tag{2}$$

Em que:

$s$  = Comprimento da ligação mais curta;

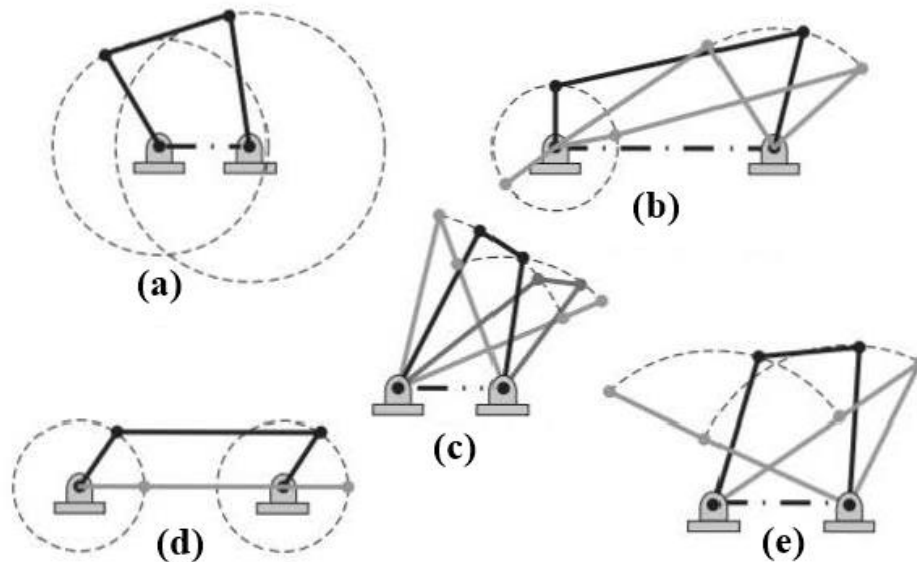
$l$  = Comprimento da ligação mais longa;

$p$  = Comprimento de uma das ligações de dimensão intermediária;

$q$  = Comprimento da outra ligação de dimensão intermediária.

No entanto, se essa equação não for atendida e a soma entre o menor e o maior link resultar em um valor maior que a soma entre os dois links intermediários, as ligações do mecanismo apresentarão apenas movimentos oscilatórios, sendo, portanto, classificado como mecanismo não Grashof. A Lei de Grashof não define qual elo estará fixo na estrutura, logo pode ser aplicada para qualquer mecanismo de quatro barras, independentemente de qual elemento está restrito de movimentação. Na figura 6, pode ser visto o detalhamento dos tipos de movimentos possíveis.

Figura 7 - Categorias dos mecanismos. (a) Dupla manivela; (b) Manivela-balancim; (c) Duplo balancim; (d) Dupla manivela (Caso especial); (e) Balancim triplo.



Fonte: (Myszka, 2012).

Nota-se que a disposição das ligações referentes às Figuras 7a, 7b e 7c atendem ao critério de Grashof ( $s+l < p+q$ ). Assim, quando a menor ligação for a manivela, o mecanismo será do tipo manivela-balancim; quando a menor ligação for o solo, será dupla manivela; e quando a menor ligação for a biela, será duplo balancim. A Figura 7d demonstra uma

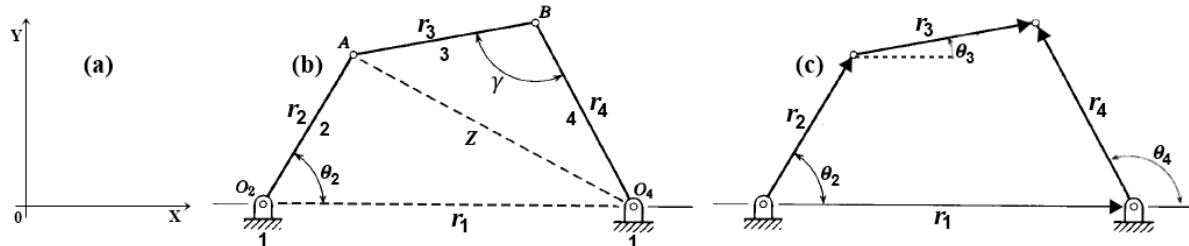
configuração colinear que ocorre no caso especial de Grashof ( $s+l=p+q$ ), na qual o movimento da cadeia se torna indeterminado, uma vez que podem ser assumidas duas configurações ao mesmo tempo. Já na figura 7e, a disposição das ligações não atende ao critério de Grashof ( $s+l>p+q$ ), não possuindo links capazes de completar uma revolução completa (MYSZKA, 2012).

## 2.5 Análise Cinemática para Mecanismos de Quatro Barras

A análise cinemática de um mecanismo é entendida, geralmente, como o processo de se obter as equações que descrevem a posição, a velocidade e a aceleração para os pontos de interesse no mecanismo, correspondentes a valores escolhidos da variável de entrada (variável primária), sua velocidade e aceleração (DOUGHTY, 2019).

A Figura 8 representa um mecanismo de quatro barras, contendo quatro pares cinemáticos binários de primeira ordem. Nesse modelo, o link 1 é fixo; o link 2 é o menor da cadeia, os ângulos  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  e  $\theta_4$  representam a orientação de cada ligação com relação a um sistema de coordenada inercial fixo em cada par cinemático; os pontos  $O_2$ ,  $O_4$ , A e B, representam aos pares cinemáticos do mecanismo;  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  e  $r_4$ , são os comprimentos de cada link; e  $\gamma$  é o ângulo de transmissão.

Figura 8 - Análise de posição. (a) Mecanismo articulado; (b) Mecanismo na forma vetorial.



Fonte: Próprio autor.

De acordo com Mabie e Ocvirk (1980), enquanto a peça 2 estiver realizando um movimento de rotação contínua, não haverá perigo de travamento para esse mecanismo. No entanto, se ela realizar movimento oscilatório, o correto dimensionamento dos comprimentos das peças é fundamental para evitar a parada do mecanismo nos pontos mortos (posições extremas). Um fator importante para mediar a ocorrência desses pontos mortos, é o ângulo de transmissão, devendo operar entre  $40^\circ$  e  $140^\circ$ .

A equação do ângulo de transmissão pode ser definida por meio da Lei dos Cossenos, onde:

$$z^2 = r_3^2 + r_4^2 - 2r_3r_4\cos(\gamma) \quad (3)$$

Reescrevendo essa equação:

$$\cos(\gamma) = \frac{(r_3^2 + r_4^2 - z^2)}{2r_3r_4} \quad (4)$$

Sendo o ângulo de inclinação  $\theta_2$  definido como ângulo de entrada, os demais ângulos  $\theta_3$  e  $\theta_4$  são as variáveis dependentes a serem calculadas. Com essa classificação, é possível determinar as equações de posição. Por meio da Figura 8c, é possível observar a soma vetorial que representa a cadeia cinemática da Figura 8b, podendo ser calculada pela Equação (5) a seguir.

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_4 = \vec{r}_2 + \vec{r}_3 \quad (5)$$

Reescrevendo essa equação, tem-se que:

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_4 - \vec{r}_2 - \vec{r}_3 = 0 \quad (6)$$

Realizando a decomposição desses vetores, para as coordenadas X e Y, descritas respectivamente nas linhas horizontal e vertical da Figura 8a, as funções de posição que definem a cadeia cinemática são dadas pelas Equações (7) e (8).

Decomposição em X:

$$f_1(\theta) = r_1 + r_4 \cos(\theta_4) - r_3 \cos(\theta_3) - r_2 \cos(\theta_2) = 0 \quad (7)$$

Decomposição em Y:

$$f_2(\theta) = r_4 \sin(\theta_4) - r_3 \sin(\theta_3) - r_2 \sin(\theta_2) = 0 \quad (8)$$

Devido à natureza do sistema de equações obtidos, um método numérico, por exemplo o de Newton-Raphson deve ser adotado para solução dessas equações. Esse método é utilizado para o refinamento de estimativas para determinar a verdadeira solução, sendo a estimativa inicial determinada por um cálculo aproximado, ou simplesmente um bom palpite (DOUGHTY, 2019).

O Método de Newton-Raphson aplicado a esse problema tem como objetivo determinar o valor das variáveis para que as Equações (7) e (8) correspondam ao valor de sua igualdade. Para isso, é feito uma estimativa inicial para possíveis valores dos ângulos  $\theta_3$  e  $\theta_4$ . Caso essa

igualdade não seja verificada, é necessário aplicar as fórmulas de correção para o palpite descritas nas Equações (9) e (10), a seguir.

$$f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 + \frac{\partial f_1}{\partial \theta_4} \Delta \theta_4 = 0 \quad (9)$$

$$f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 + \frac{\partial f_2}{\partial \theta_4} \Delta \theta_4 = 0 \quad (10)$$

Nessas duas expressões são definidos os valores de  $\Delta \theta_3$  e  $\Delta \theta_4$  para a aplicação da correção do palpite ( $\theta'_3$  e  $\theta'_4$ ) por meio das Equações (11) e (12).

$$\theta'_3 = \theta_3 + \Delta \theta_3 \quad (11)$$

$$\theta'_4 = \theta_4 + \Delta \theta_4 \quad (12)$$

Desse modo, todo o processo é feito até que a igualdade das equações (7) e (8) seja atendida.

As funções de velocidade podem ser obtidas a partir da derivação da função de posição em relação ao tempo, e são descritas nas Equações (13) e (14). Já para a obtenção da função de aceleração, deve ser feita a derivação da velocidade, como mostram as Equações (15) e (16).

$$-r_4 \dot{\theta}_4 \sin(\theta_4) + r_3 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) + r_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) = 0 \quad (13)$$

$$r_4 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_4) - r_3 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3) - r_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) = 0 \quad (14)$$

$$-r_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 - r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 + r_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 + r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 = 0 \quad (15)$$

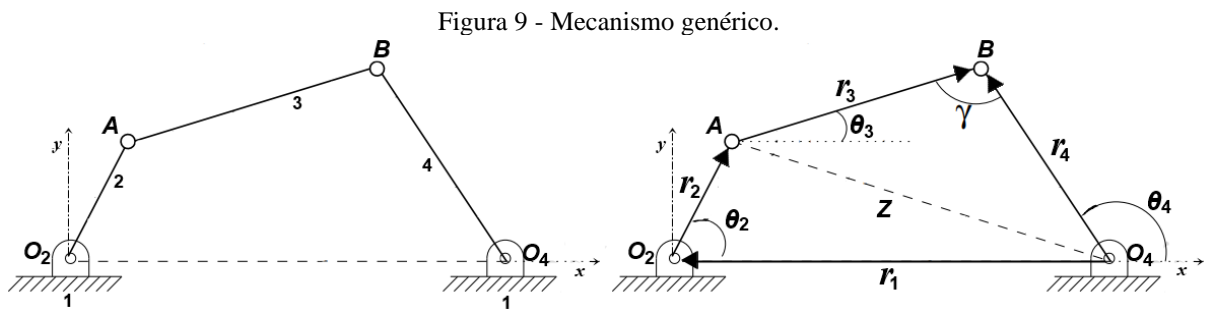
$$-r_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 + r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 - r_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 + r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 = 0 \quad (16)$$

### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

Para realização da análise cinemática do mecanismo, optou-se por fazer um estudo de caso com a aplicação de um mecanismo genérico de quatro barras, que será a base para o desenvolvimento computacional das equações descritas a seguir. Por meio da utilização da linguagem de programação Python®, serão realizadas todas as etapas da análise cinemática, de maneira a solucionar um problema de mecanismo planar de quatro barras.

#### 3.1 Mecanismo genérico de quatro barras

O mecanismo a ser analisado é um mecanismo de quatro barras simples, como mostra a Figura 9. Sendo apresentadas as ligações e sua respectiva soma vetorial para posterior análise.



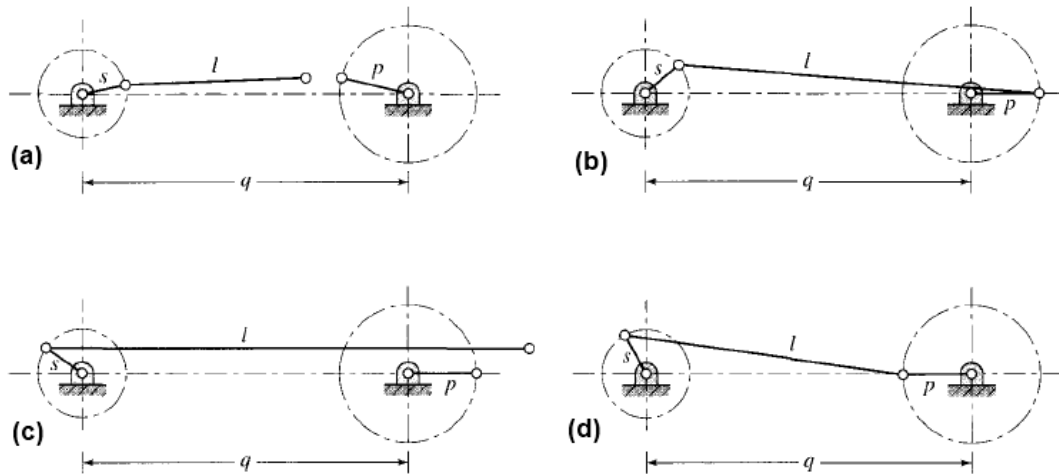
Fonte: (PRÓPRIO AUTOR, 2022).

Sendo  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  os respectivos comprimentos das ligações,  $\theta_2, \theta_3$  e  $\theta_4$  os ângulos que determinam as posições do mecanismo, e  $\gamma$  o ângulo de transmissão.

Para a execução do programa a ser elaborado, deverão ser previamente fornecidos todos os valores referentes ao comprimento das ligações. Bem como o ângulo  $\theta_2$ , e a velocidade e aceleração angular referente ao link 2, que servirão de base para o cálculo das demais componentes.

Para a execução do programa, será essencial efetuar a análise dos comprimentos fornecidos, para verificar se há possibilidade de realização dos devidos cálculos, uma vez que os comprimentos fornecidos podem apresentar problemas, como os descritos na Figura 10. Para um mecanismo de quatro barras, é fundamental que os valores declarados para os comprimentos dos elos atendam ao critério de Grashof.

Figura 10 - Casos que impedem a análise. (a)  $s + l + p < q$ ; (b)  $s + l - p > q$ ; (c)  $s + q + p < l$ ; (d)  $s + q - p < l$ .



Fonte: (Shigley e Uicker, 1981).

Analisando a Figura 10, é possível notar diferentes aspectos que impossibilitam a análise cinemática. Nas Figuras 10a e 10c, é possível observar que os links não se conectam, já nas Figuras 10b e 10d, o link S é incapaz de realizar rotação.

A vantagem mecânica da articulação de quatro barras é diretamente proporcional ao ângulo de transmissão, e por esse motivo, essa vantagem mecânica está continuamente mudando conforme a articulação se move. Esse ângulo de transmissão será definido por meio da aplicação da Equação (4).

### 3.2 Análise de posição

Para a análise computacional da posição, as equações referentes a cada ângulo do mecanismo precisarão ser definidas e inseridas ao código. Para esse desenvolvimento, os comprimentos dos links são escritos na forma vetorial, resultando na seguinte equação:

$$-\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 - \vec{r}_4 = 0 \quad (17)$$

Essa soma vetorial é referente ao esquema apresentado na Figura 10. Realizando a decomposição desses vetores, para as coordenadas X e Y, as funções de posição que definem o mecanismo são dadas pelas Equações (18) e (19).

Decomposição em X:

$$-r_1 + r_2 \cos(\theta_2) + r_3 \cos(\theta_3) - r_4 \cos(\theta_4) = 0 \quad (18)$$

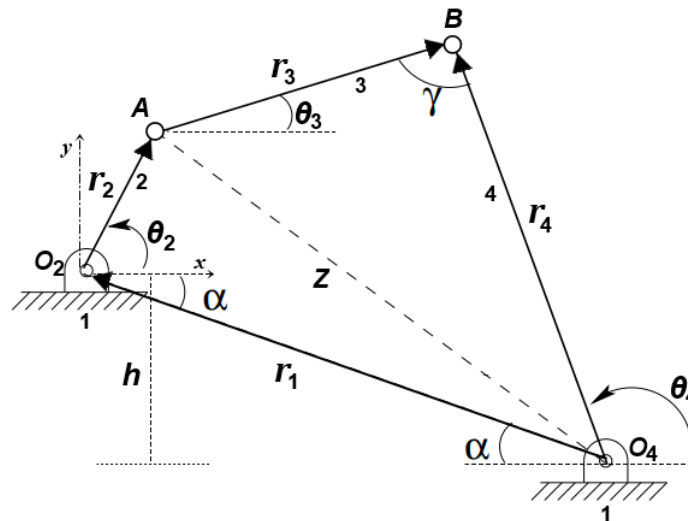
Decomposição em Y:

$$r_2 \text{sen}(\theta_2) + r_3 \text{sen}(\theta_3) - r_4 \text{sen}(\theta_4) = 0 \quad (19)$$

Para a análise computacional da posição desse mecanismo, as Equações (18) e (19), descritas anteriormente serão calculadas com o implemento do Método de Newton-Raphson, que foi apresentado anteriormente e faz uso das Equações (9), (10), (11) e (12). Essa forma de análise computacional será muito eficiente, permitindo uma rápida execução desse método iterativo.

Para esse estudo, o programa a ser desenvolvido também será capaz de realizar a análise inclusive quando a ligação fixa não estiver posta de maneira horizontal. Quando o mecanismo possui uma diferença de altura no eixo fixo, como apresentado na Figura 11, essas equações de posição ficam um pouco diferentes, visto que a ligação 1 passa a ter componente em ambos os eixos coordenados.

Figura 11 - Mecanismo genérico com diferença de altura.



Fonte: (próprio autor).

Sendo:

$h$  = Diferença de altura ente as extremidades do link 1;

$\alpha$  = Ângulo não variável gerado pelo incremento de  $h$ .

Para esse caso, essa altura  $h$  também será um parâmetro a ser fornecido como valor de entrada. Assim, o ângulo  $\alpha$  pode ser determinado pela Equação (20).

$$\alpha = \text{sen}^{-1}(h/r_1) \quad (20)$$

Desse modo, as equações de posição deverão ser consideradas de acordo com as Equações (21) e (22), referentes à decomposição da soma vetorial descrita na Figura 11.

Decomposição em X:

$$r_1 \cos(\alpha) + r_2 \cos(\theta_2) + r_3 \cos(\theta_3) - r_4 \cos(\theta_4) = 0 \quad (21)$$

Decomposição em Y:

$$r_1 \text{sen}(\alpha) + r_2 \text{sen}(\theta_2) + r_3 \text{sen}(\theta_3) - r_4 \text{sen}(\theta_4) = 0 \quad (22)$$

### 3.3 Análise de velocidade angular

Sendo a velocidade angular  $\omega_2$  fornecida pelo usuário, para determinara as velocidades angulares  $\omega_3$  e  $\omega_4$ , as Equações (18) e (19) foram derivadas com base no Método dos Coeficientes Cinemáticos, apresentado por Shigley e Uicker, (1981), sendo a derivação de ambas feitas em função de  $\theta_2$ .

$$-r_3 \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_3) + r_4 \dot{\theta}_4 \text{sen}(\theta_4) = r_2 \text{sen}(\theta_2) \quad (23)$$

$$r_3 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3) - r_4 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_4) = r_2 \cos(\theta_2) \quad (24)$$

Em que:

$$\dot{\theta}_3 = \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_2} \quad e \quad \dot{\theta}_4 = \frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2} \quad (25)$$

Isolando o  $\dot{\theta}_4$  nas Equações (23) e (24), e igualando as equações correspondentes, foi possível determinar a equação referente ao coeficiente cinemático  $\dot{\theta}_3$ .

$$\dot{\theta}_3 = \frac{-r_2 \text{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \text{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (26)$$

Analogamente, isolando  $\dot{\theta}_3$  e igualando as expressões, foi obtida a equação de  $\dot{\theta}_4$ .

$$\dot{\theta}_4 = \frac{-r_2 \text{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \text{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (27)$$

Definido isso, as velocidades angulares para as ligações 2 e 4 podem ser escritas como:

$$\omega_3 = \dot{\theta}_3 \omega_2 \quad (28)$$

$$\omega_4 = \dot{\theta}_4 \omega_2 \quad (29)$$

Para o caso desse mecanismo abordado, que configura um manivela-balancim, quando os links 3 e 4 estão alinhados. A diferença entre esses ângulos é nula, logo, os coeficientes cinemáticos tendem para o infinito, sendo essas as posições extremas desse mecanismo.

### 3.4 Análise de aceleração angular

Sendo fornecida a aceleração angular  $\alpha_2$ , para determinar a aceleração angular as Equações (23) e (24) foram derivadas com base no Método dos Coeficientes Cinemáticos, sendo feita a derivação de ambas as equações em função de  $\theta_2$ .

$$-r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 - r_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 + r_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 = r_2 \cos \theta_2 \quad (30)$$

$$-r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 + r_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 + r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 - r_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 = r_2 \sin \theta_2 \quad (31)$$

Em que:

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \theta_2^2} \quad e \quad \ddot{\theta}_4 = \frac{\partial^2 \theta_4}{\partial \theta_2^2} \quad (32)$$

Isolando a componente das equações que possuem  $\theta''$ , em ambas as equações, as demais componentes foram renomeadas, como mostra as equações a seguir:

$$B_1 = r_2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 - r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 \quad (33)$$

$$B_2 = r_2 \sin \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 - r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 \quad (34)$$

Assim, ao isolar os coeficientes cinemáticos, são obtidas as seguintes equações:

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{-B_1 \cos \theta_4 - B_2 \sin \theta_4}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (35)$$

$$\ddot{\theta}_4 = \frac{-B_1 \cos \theta_3 - B_2 \sin \theta_3}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (36)$$

Com isso, as acelerações angulares são definidas pelas Equações (37) e (38):

$$\alpha_3 = \ddot{\theta}_3 \omega_2^2 + \dot{\theta}_3 \alpha_2 \quad (37)$$

$$\alpha_4 = \ddot{\theta}_4 \omega_2^2 + \dot{\theta}_4 \alpha_2 \quad (38)$$

### 3.5 Análise de velocidade e aceleração por cálculo vetorial

Para o cálculo da velocidade e da aceleração do sistema, serão utilizadas as fórmulas apresentadas por Mabie e Reinholtz, (1987), que fazem uma abordagem na forma vetorial dessas componentes. Dos muitos métodos utilizados para determinar a velocidades e acelerações em mecanismos, a análise que utiliza matemática vetorial para expressar a velocidade e aceleração de um ponto em relação a um sistema de coordenadas fixo e móvel é um dos mais utilizados. O uso desse método mantém os conceitos físicos do problema, sendo viável para implementação de soluções por computador, o que é uma vantagem decisiva se um mecanismo for analisado para um ciclo completo.

Nesse sentido, a equação vetorial da velocidade é dada por:

$$\vec{V}_p = \vec{V}_0 + \vec{V} + \vec{\omega}_0 \times \vec{R} \quad (39)$$

Em que:

$V_p$  = Velocidade em um dado ponto P do corpo;

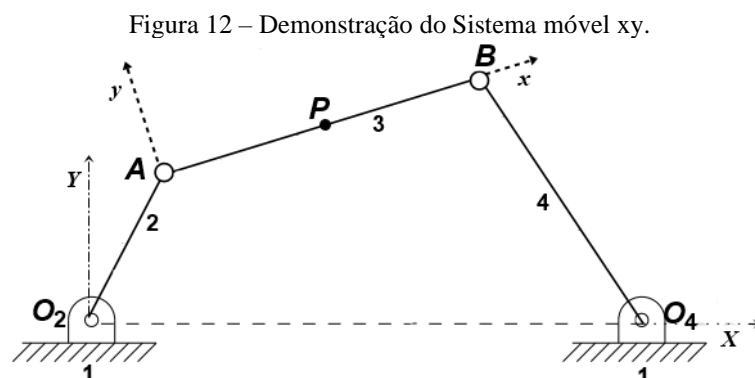
$V_0$  = Velocidade na origem do sistema móvel xy;

$V$  = Velocidade relativa do ponto com a origem XY;

$\omega_0$  = Velocidade angular na origem do sistema móvel;

$R$  = Distância entre a origem do sistema móvel e o ponto P.

A distinção entre os eixos coordenados mencionados pode ser observada na Figura 12.



Fonte: (Próprio autor).

Para esse tipo de aplicação, como o eixo móvel xy acompanha a movimentação do mecanismo, não há um movimento relativo entre o ponto P e esse sistema xy. Desse modo, o componente V da Equação (39) é nulo, e a equação da velocidade no ponto pode ser reescrita como:

$$\vec{V}_p = \vec{V}_0 + \vec{\omega}_0 x \vec{R} \quad (40)$$

A equação da aceleração, por sua vez, é dada por:

$$\vec{A}_p = \vec{A}_0 + \vec{A} + 2\vec{\omega} x \vec{V} + \dot{\vec{\omega}} x \vec{R} + \vec{\omega} x (\vec{\omega} x \vec{R}) \quad (41)$$

Sendo:

$A_p$  = Aceleração em um dado ponto P do corpo;

$A$  = Velocidade relativa do ponto com a origem XY;

$2\vec{\omega} x \vec{V}$  = Aceleração de Coriolis;

$\dot{\vec{\omega}} x \vec{R}$  = Aceleração tangencial;

$\vec{\omega} x (\vec{\omega} x \vec{R})$  = Aceleração centrípeta.

Como não há movimento relativo entre o ponto P e o eixo móvel, a aceleração relativa será nula, e como a velocidade relativa é nula, o termo referente à aceleração de Coriolis não irá atuar no mecanismo. Desse modo, a equação da aceleração pode ser reescrita.

$$\vec{A}_p = \vec{A}_0 + \dot{\vec{\omega}} x \vec{R} + \vec{\omega} x (\vec{\omega} x \vec{R}) \quad (42)$$

### 3.6 Linguagem de Programação

Os computadores são grandes recursos para execução de tarefas e automatização de processos, e por esse motivo, são muitas vezes considerados como máquinas inteligentes. No entanto, de acordo com Kochan (2005), embora os computadores possuam uma grande velocidade no fornecimento de soluções, essas máquinas não podem receber esse adjetivo, uma vez que só executam uma série de funções que foram estabelecidas previamente por meio de algoritmos.

Os algoritmos fornecem essas instruções de maneira estruturada para que os resultados esperados sejam alcançados, podendo ser escritas em diferentes linguagens de programação,

como Java, R, C/C++, MATLAB e Python®. Sendo essa última a linguagem utilizada no desenvolvimento da aplicação.

### 3.7 Python

Com as equações analíticas essenciais para resolução do problema já determinadas, o desenvolvimento do programa foi iniciado para promover a solução numérica das mesmas por meio da linguagem Python®. Linguagem gratuita, de fonte aberta e com possibilidade de aplicação em diversos sistemas operacionais.

Python® é uma linguagem considerada recente, com início na década de 80, e já possui grande aderência no mercado por conta da sua relativa facilidade de aprendizado e sua aplicabilidade em automatização de rotinas. Outros fatores que contribuem para sua popularidade são os seus recursos facilitadores, como variedade de bibliotecas, estruturas de *machine learning* e PEPs (Propostas de Enriquecimento do Python).

As PEPs, que são feitas pelos próprios usuários da linguagem, descrevem mudanças e normas de padronização para o Python®. Essa padronização facilita a compreensão dos códigos e contribuem para a eliminação de erros no momento da implementação.

A PEP-08, que é conhecida como a PEP das boas práticas, visa padronizar o código e seus comentários. Essa PEP facilita a compreensão para trabalhos em grupo e foi um dos motivos para a escolha da IDE (*Integrated Development Environment* - Ambiente de Desenvolvimento Integrado) utilizada.

Ao contrário de muitas linguagens amplamente utilizadas para resolução de problemas relacionados à mecânica, que utilizam uma linguagem compilada, a linguagem Python® é uma linguagem interpretada. O que significa que essa linguagem utiliza um interpretador para converter o código em linguagem de máquina. Apesar de não gerar arquivos executáveis e de ter um processamento relativamente mais lento por executar uma linha do código por vez, o Python® proporciona uma maior facilidade na detecção e identificação de possíveis erros

Como destacado anteriormente, essa linguagem possui diversas bibliotecas à disposição dos usuários, e suas funções variam de análises matemáticas, análises de dados, automação, entre outros. Para que fosse possível determinar posição, velocidade e aceleração para esse desenvolvimento, foram utilizadas duas bibliotecas principais no código, sendo elas a Math e a Numpy. A biblioteca Math dispõe de diversas operações matemática, incluindo operações trigonométricas com seno, cosseno e tangente, por exemplo. A biblioteca Numpy também se refere a operações matemáticas, contudo, é focada no trabalho com vetores e matrizes.

### 3.8 PyCharm

A IDE utilizada nesse projeto para chamar o interpretador que converte os códigos Python® para a linguagem de máquina foi o PyCharm, que é uma das ferramentas mais utilizadas por quem programa nessa linguagem. Isso por ser muito intuitiva e por fornecer a possibilidade de trabalhar com ambientes virtuais.

Para quem está começando a programar em Python®, o PyCharm consegue ensinar o usuário a organizar corretamente a estrutura dos códigos, alertando o usuário sobre inconformidades enquanto o código é escrito. Dentro desses alertas é aplicada a PEP – 08, que não impede a execução do código, mas orienta quanto às suas boas práticas.

Além de possuir diversas bibliotecas de operações matemáticas integradas, essa IDE consegue gerar gráficos interativos com a aplicação da biblioteca Matplotlib. Por todas as vantagens e por ser uma ferramenta gratuita, o Pycharm possui forte potencial para aplicação no ambiente acadêmico.

## 4 DESENVOLVIMENTO DO CÓDIGO

Com a definição de toda a configuração geométrica do sistema a ser analisado, o programa foi construído com o objetivo de retornar valores cinemáticos de relevância na análise de mecanismos, tais como posição, velocidade angular, aceleração angular e ângulo de transmissão. O código foi elaborado em um notebook com processador ADM Ryzen 5, com placa gráfica Radeon.

Os principais pontos que serviram de apoio para a elaboração uma rotina computacional destinada à análise cinemática de mecanismos de 4 barras foram a utilização do método de resolução de Newton Raphson e todas as etapas de verificação de viabilidade que são feitas antes da aplicação do método. Para esse tipo de aplicação é necessário que haja o *input* parâmetros iniciais para que as variáveis da cadeia cinemática sejam encontradas.

Por ser iterativo, o método não é capaz de prever quantas iterações são necessárias para que a convergência dos resultados aconteça, podendo inclusive ocorrer casos em que não haverá convergência. Nesse sentido, o método computacional é um recurso capaz avaliar esses cenários e entregar resultados ao usuário em poucos segundos.

A lógica computacional por trás do código desenvolvido pode ser verificada no tópico de Lógica e Implementação (4.2).

### 4.1 Bibliotecas e Funções Python

As bibliotecas do Python são recursos essenciais para a implementação de códigos funcionais e menos trabalhosos. São mais de 100 mil bibliotecas compostas por módulos e funções que podem ser implementadas e evitam a necessidade de ficar realizando cálculos excessivos para criação dos códigos.

Para a implementação do código de análise cinemática foram utilizadas duas grandes bibliotecas: a “Math” e a “Numpy”.

A biblioteca Math permite a utilização de funções matemáticas, tais como: radians, sin, cos, asin, atan, degrees, acos. Todas essas funções foram importadas de dentro do Math para utilização no código. Como a análise geométrica é a base para a implementação do programa, seria muito difícil estabelecer uma lógica computacional sem a utilização dessa biblioteca.

A biblioteca Numpy, por sua vez, é destinada à operação com arrays, ou seja, vetores e matrizes. Com essa biblioteca foi possível implementar as equações (09) e (10), cruciais para a aplicação do método de Newton Raphson. Com essa biblioteca foi possível escrever as

equações de Newton na forma matricial e vetorial, sendo as variáveis de correções definidas por operações de arrays.

No código também foram utilizadas diversas outras funções, como: if, else, elif, print e while, que serão detalhadas no tópico a seguir.

## 4.2 Lógica de Implementação

Para começar a implementar um código, seja em python ou em outra linguagem, é necessário que tanto o modelo matemático, quanto as etapas de execução estejam bem definidas. Desse modo, após a concretização da metodologia, o processo de elaboração teve início.

A lógica para implementação do código seguiu uma série de etapas, sendo a primeira delas o input dos dados. Como definido, os dados de entrada são: comprimentos dos links, altura entre os pinos do link “solo”, velocidade e aceleração angulares.

Após isso, foi incrementado ao código a análise de Grashof. Nesse caso, o código coleta as informações dos links que foram fornecidas pelo usuário e aplicam na equação (02). Para verificar esse critério, foi adicionada uma variável denominada “impedimento”, que irá receber o valor =1.

Esse critério da variável impedimento também é aplicada às equações (a) e (c) da Figura 10, que verificam a possibilidade de não haver conexão entre os links.

Com Critério de Grashof aliado às classificações na Figura 7, foi possível definir qual tipo de mecanismo está sendo avaliado, seja manivela-balancim, dupla manivela, duplo balancim, e caso os inputs não configurem um mecanismo de nenhuma das classificações, o código informa que não foi possível identificar o tipo de mecanismo.

Após a classificação, a variável impedimento passa a ter poder de decisão, com a utilização do “if”. Em que se impedimento for = 1, irá encerrar o código, mas se for = 0, irá continuar sua execução.

Nesse ponto, a variável q irá decidir o caminho do código é a variável H, que irá encaminhar para os ciclos de repetição “While” referente ao seu sistema de coordenadas.

Dentro dessas estruturas de repetição são calculadas as variáveis de posição, aceleração angular e velocidade angular, que permanecem em repetição até a convergência do método de Newton Raphson. O limite máximo de iterações é 50mil, e atingindo essa quantidade a operação é finalizada. Havendo convergência na estrutura de repetição, esse ciclo para, e para finalizar, realiza o cálculo do ângulo de transmissão

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

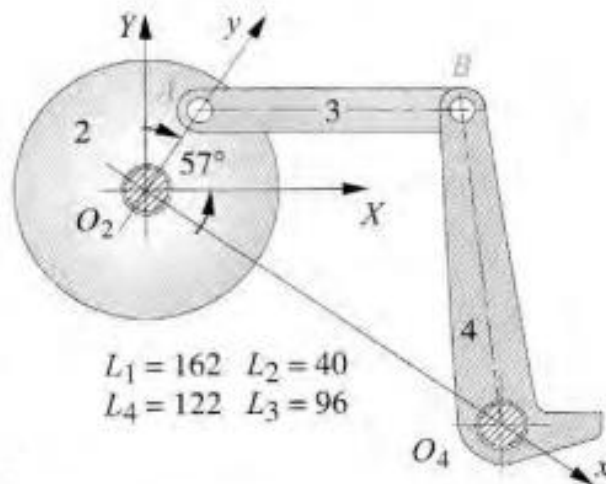
### 5.1 Validação do Código

Para comprovar a correta execução do código após sua elaboração, foi feita a validação do programa por meio da solução de um problema extraído do livro Norton (2010). Esse problema é o 7.24, e pode ser encontrado no capítulo: Análise de Acelerações.

- Enunciado:

O mecanismo da Figura P7-8b possui o elo 1 a  $-36^\circ$  e o elo 2 a  $57^\circ$  no sistema de coordenadas Globais  $XY$ . Encontre  $\alpha_4$   $A_A$  e  $A_B$  no sistema de coordenadas globais para a posição mostrada se  $\omega_2 = 20$  rad/s, constante.

Figura 13 –Exemplo para Validação – (Figura P7-8b)



Fonte: (Norton, 2010).

Nesse momento não serão calculadas as acelerações  $A_A$  e  $A_B$ , somente a aceleração angular  $\alpha_4$ . Embora seja uma única variável, a validação do código será concretizada por conta da dependência que as variáveis possuem entre si. Logo, para que a  $\alpha_4$  esteja correta, as demais variáveis a serem calculadas também precisam estar.

Para validação, o código atuou em diferentes cenários, sendo eles:

1. Considerando o sistema de coordenadas “local”  $xy$  (Chute inicial:  $\theta_3 = 30^\circ$ ;  $\theta_4 = 130^\circ$ );

2. Considerando o sistema de coordenadas global, como pede o enunciado (Chute inicial:  $\theta_3 = 05^\circ$ ;  $\theta_4 = 90^\circ$ );
3. Considerando o sistema local e chutes iniciais mais distantes do real (Chute inicial:  $\theta_3 = 60^\circ$ ;  $\theta_4 = 20^\circ$ );
4. Considerando o sistema global e chutes iniciais mais distantes do real (Chute inicial:  $\theta_3 = 25^\circ$ ;  $\theta_4 = 110^\circ$ );

Para o caso 1, como o sistema considerado foi o xy, o par cinemático  $r_1$  pôde ser considerado como se estivesse na horizontal. Logo, o ângulo entre o eixo x e o par cinemático  $r_2$  foi de  $93^\circ$ , que é a soma dos ângulos destacados no enunciado do problema. Tais considerações podem ser visualizados na sessão de *input* (Figura 14).

Figura 14 – Caso 1 - Input

```
Análise Cinemática de Mecanismos Articulados Planos de Quatro Barras:
+++++
Insira o valor referente ao comprimento da barra fixa (r1): 162
Insira o valor referente ao comprimento da manivela (r2): 40
Insira o valor referente ao comprimento da barra (r3): 96
Insira o valor referente ao comprimento da barra (r4): 122
Insira a distância vertical entre os pontos o2 e o4 (H): 0
Insira o valor referente ao ângulo da manivela (teta 2): 93
Insira um chute inicial para o ângulo (teta 3): 30
Insira um chute inicial para o ângulo (teta 4): 130
Insira a velocidade angular (W2): 20
Insira a aceleração angular (S2): 0
+++++
O mecanismo atende ao Critério de Grashof
+++++
Número de Impedimentos para a Análise: 0.
Tipo de Mecanismo: Manivela-balancim.
+++++
Comprimentos Fornecidos: r1 = 162.00; r2 = 40.00; r3 = 96.00; r4 = 122.00.
+++++
```

Fonte: (Próprio autor).

No caso 2 foi considerado o sistema de coordenadas global. Nesse sentido, a distância vertical entre as fixações do link 1 foi calculada e inserida no código, sendo esse cálculo representado pela equação (43). A Figura 15 mostra essa condição.

$$H = r_1 \text{sen}(36^\circ) \quad (43)$$

Figura 15 – Caso 2 - Input

```

Análise Cinemática de Mecanismos Articulados Planos de Quatro Barras:
+++++
Insira o valor referente ao comprimento da barra fixa (r1): 162
Insira o valor referente ao comprimento da manivela (r2): 40
Insira o valor referente ao comprimento da barra (r3): 96
Insira o valor referente ao comprimento da barra (r4): 122
Insira a distância vertical entre os pontos o2 e o4 (H): 98.2212
Insira o valor referente ao ângulo da manivela (teta 2): 57
Insira um chute inicial para o ângulo (teta 3): 0
Insira um chute inicial para o ângulo (teta 4): 90
Insira a velocidade angular (W2): 20
Insira a aceleração angular (S2): 0
+++++
O mecanismo atende ao Critério de Grashof
+++++
Número de Impedimentos para a Análise: 0.
Tipo de Mecanismo: Manivela-balancim.
+++++
Comprimentos Fornecidos: r1 = 162.00; r2 = 40.00; r3 = 96.00; r4 = 122.00.
+++++

```

Fonte: (Próprio autor).

No caso 3 (Figura 16), assim como o caso 1, foi considerado o eixo de coordenadas xy como referência. Contudo, foi aplicada uma condição de chute em que  $\theta_3$  recebe um valor de chute maior que o de  $\theta_4$ . Essa condição vai de oposição ao que é estabelecido no solucionário do problema analisado, visto que  $\theta_3$  é menor que  $\theta_4$ .

Figura 16 – Caso 3 - Input

```

Análise Cinemática de Mecanismos Articulados Planos de Quatro Barras:
+++++
Insira o valor referente ao comprimento da barra fixa (r1): 162
Insira o valor referente ao comprimento da manivela (r2): 40
Insira o valor referente ao comprimento da barra (r3): 96
Insira o valor referente ao comprimento da barra (r4): 122
Insira a distância vertical entre os pontos o2 e o4 (H): 0
Insira o valor referente ao ângulo da manivela (teta 2): 93
Insira um chute inicial para o ângulo (teta 3): 40
Insira um chute inicial para o ângulo (teta 4): 20
Insira a velocidade angular (W2): 20
Insira a aceleração angular (S2): 0
+++++
O mecanismo atende ao Critério de Grashof
+++++
Número de Impedimentos para a Análise: 0.
Tipo de Mecanismo: Manivela-balancim.
+++++
Comprimentos Fornecidos: r1 = 162.00; r2 = 40.00; r3 = 96.00; r4 = 122.00.
+++++

```

Fonte: (Próprio autor).

Por fim, o caso 4 segue a mesma linha de execução do caso 2, mas a fim de verificação de possíveis erros, contou com um intervalo de aproximadamente  $20^\circ$  entre os chutes e os ângulos reais (Figura 17).

Figura 17 – Caso 4 - Input

```

Análise Cinemática de Mecanismos Articulados Planos de Quatro Barras:
+++++
Insira o valor referente ao comprimento da barra fixa (r1): 162
Insira o valor referente ao comprimento da manivela (r2): 40
Insira o valor referente ao comprimento da barra (r3): 96
Insira o valor referente ao comprimento da barra (r4): 122
Insira a distância vertical entre os pontos o2 e o4 (H): 98.2212
Insira o valor referente ao ângulo da manivela (teta 2): 57
Insira um chute inicial para o ângulo (teta 3): 25
Insira um chute inicial para o ângulo (teta 4): 120
Insira a velocidade angular (W2): 20
Insira a aceleração angular (S2): 0
+++++
O mecanismo atende ao Critério de Grashof
+++++
Número de Impedimentos para a Análise: 0.
Tipo de Mecanismo: Manivela-balancim.
+++++
Comprimentos Fornecidos: r1 = 162.00; r2 = 40.00; r3 = 96.00; r4 = 122.00.
+++++

```

Fonte: (Próprio autor).

Embora sejam casos diferentes, todos eles mantêm o mesmo ângulo para entre os links  $r_1$  e  $r_2$ , o que muda é apenas o plano referência. Nesse sentido, por se tratar de um mecanismo composto por corpos rígidos, é esperado que os ângulos e demais variáveis apresentem os mesmos resultados nas análises.

## 5.2 Resolução

A resolução de um problema da literatura é muito comum para a validação de códigos computacionais, independente da linguagem adotada. Isso porque essa prática garante a confiabilidade do programa criado e pode servir de base para a correção de possíveis instabilidades e erros. Na literatura há diversos profissionais renomados do ramo da engenharia mecânica, e o Robert L. Norton, autor do livro em que o problema aplicado foi extraído, é um deles. Nesse sentido, o problema 7.25 (Norton, 2010) foi escolhido por contemplar dois sistemas de coordenadas e acelerações angulares, atendendo as análises desenvolvidas ao longo da metodologia e que o código criado é capaz de fazer.

É interessante notar que embora os quatro casos possuam formas de abordagem diferentes, se trata de um único mecanismo. E uma vez que não há variação no ângulo entre os links, também não deve haver variação de velocidade ou aceleração, independente da forma com que os sistemas coordenados estejam dispostos.

A fim de facilitar o entendimento dos resultados obtidos com a aplicação do código, serão abordados inicialmente os casos 1 e 3, que foram avaliados com o sistema de coordenadas xy “local”, e posteriormente os casos 2 e 4 com o sistema de coordenadas globais XY.

- Casos 1 e 3:

Para os casos 1 e 3, o par cinemático  $r_1$  pode ser considerado na vertical, isso porque o eixo x do plano xy está paralelo a ele. Desse modo, ele pode ser tratado como o mecanismo genérico presente na Figura 09. Como o código consegue fazer a distinção entre os mecanismos que possuem diferença de altura entre as fixações do “solo” dos que possuem o link horizontal, as fórmulas base para os casos 1 e 3 são as equações (18) e (19).

As Figuras 18 e 19 apresentam os resultados obtidos por meio das iterações feitas pelo código construído.

Figura 18 – Caso 1 - Resultados

```

+++++
Convergência e Número de Iterações:
F1= -0.0001.
F2= -0.0001.
N0= 599.
+++++
Análise de Posição:
A2= 93.000.
A3= [31.50411316].
A4= [132.38640795].
+++++
Análise de Velocidade Angular:
W2= 20.000.
W3= -5.385.
W4= 5.868.
+++++
Análise de Aceleração Angular:
S2= 0.000.
S3= 93.586.
S4= 81.038.
+++++
Angulo de Transmissão
YY= 100.882.
Fim!

Process finished with exit code 0

```

Fonte: (Próprio autor).

Figura 19 – Caso 3 - Resultados

```

Convergência e Número de Iterações:
F1= -0.0001.
F2= 0.0001.
N0= 812.
+++++
Análise de Posição:
A2= 93.000.
A3= [-328.49576238].
A4= [-227.61357403].
+++++
Análise de Velocidade Angular:
W2= 20.000.
W3= -5.385.
W4= 5.868.
+++++
Análise de Aceleração Angular:
S2= 0.000.
S3= 93.586.
S4= 81.038.
+++++
Angulo de Transmissão
YY= 100.882.
Fim!

Process finished with exit code 0

```

Fonte: (Próprio autor).

Ao comparar as duas imagens, é possível verificar que 3 variáveis estão diferentes, sendo elas o número de iterações, o ângulo referente ao link 3, e o ângulo referente ao link 4. Contudo, isso não é considerado um problema.

O número de iterações não é uma variável que precisa ser igual nesses dois casos. Isso porque ela varia de acordo com os chutes iniciais fornecidos, quanto maior a diferença entre o ângulo real e o chute, maior será o número de iterações para que haja a convergência.

Já para os ângulos 3 e 4 do caso 3, é possível observar que são ângulos com módulo muito grande, e com sinal oposto aos mesmos ângulos do caso 1. Contudo, todas as outras variáveis que dependem desses ângulos estão iguais nos dois casos. Isso porque os ângulos representam a mesma posição graficamente, e se somar  $360^\circ$  aos ângulos 3 e 4 do caso 3, será possível notar que os ângulos seriam os mesmos.

Essa condição ocorreu no caso 3 porque nele foi aplicada uma condição de chute em que  $\theta_3$  recebe um valor de chute maior que o de  $\theta_4$ . indo de oposição ao que foi estabelecido no solucionário do problema analisado, visto que  $\theta_3$  é menor que  $\theta_4$ .

- Casos 2 e 4:

Os casos 2 e 4, por sua vez, foram avaliados considerando o sistema de coordenadas globais, XY. E por possuírem uma diferença de altura, sua solução está vinculada à análise de mecanismo genérico da Figura 11, e suas equações para análise são vinculadas às equações 21 e 22.

A resolução determinada nos casos 2 e 4 estão respectivamente destacados nas Figuras 20 e 21.

Figura 20 – Caso 2 - Resultados

```

Convergência e Número de Iterações:
F1= -0.0001.
F2= 0.0001.
N0= 656.
+++++
Análise de Posição:
A2= 57.000.
A3= [-4.49574609].
A4= [96.38640646].
+++++
Análise de Velocidade Angular:
W2= 20.000.
W3= -5.385.
W4= 5.868.
+++++
Análise de Aceleração Angular:
S2= 0.000.
S3= 93.586.
S4= 81.038.
+++++
Angulo de Transmissão
YY= 100.882.
Fim!

Process finished with exit code 0

```

Fonte: (Próprio autor).

Figura 21 – Caso 4 – Resultados

```

Convergência e Número de Iterações:
F1= 0.0001.
F2= 0.0001.
N0= 729.
+++++
Análise de Posição:
A2= 57.000.
A3= [-4.49575854].
A4= [96.38649362].
+++++
Análise de Velocidade Angular:
W2= 20.000.
W3= -5.385.
W4= 5.868.
+++++
Análise de Aceleração Angular:
S2= 0.000.
S3= 93.586.
S4= 81.038.
+++++
Angulo de Transmissão
YY= 100.882.
Fim!

Process finished with exit code 0

```

Fonte: (Próprio autor).

Para esses 2 casos destacados, é possível notar que a única variável divergente é o número de iterações, exclusivamente por conta da diferença de ângulos de input declarados.

A Figura 22 mostra as primeiras iterações que o código realizou para o caso 4, e nele é possível observar que os valores de F2 e F2 eram muito expressivos, convergindo na iteração de número 729.

Figura 22 – Caso 4 – Primeiras Iterações

```

+++++
+++++
Convergência e Número de Iterações:
F1= 19.4568.
F2= 54.6969.
N0= 1.
+++++
Análise de Posição:
A2= 57.000.
A3= [24.53214016].
A4= [109.66470975].
+++++
Convergência e Número de Iterações:
F1= 19.1136.
F2= 53.7429.
N0= 2.
+++++
Análise de Posição:
A2= 57.000.
A3= [24.07030335].
A4= [109.33810223].
+++++

```

Fonte: (Próprio autor).

É notável que os valores de velocidade angular e aceleração angular não divergem, independentemente do sistema de coordenadas, e que os ângulos variam de acordo com a sua posição em relação ao eixo horizontal, agindo conforme o esperado. Por essas razões e pelos resultados do caso 1 coincidirem com o que foi declarado na literatura, é possível afirmar que o código desenvolvido em Python para a análise cinemática está validado, e é totalmente funcional para determinar as variáveis a q se propõe.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No estudo bibliográfico realizado, foram levantadas todas as etapas e equações necessárias para a análise cinemática de mecanismos de 4 barras, com a aplicação do método de Newton Raphson. Tendo conhecimento da eficiência do método aplicado em sala de aula, e de dificuldade para ser aplicado por ser muito trabalhoso, foram feitos diversos estudos em livros e artigos para definição de uma rotina e uma linguagem computacional capaz de otimizar o método, deixando a resolução dos problemas menos trabalhosas e sem ocorrência de erros.

Após a definição da metodologia, foi elaborado um código capaz de identificar se o mecanismo atendia a Lei de Grashof e os critérios de ligação, e posteriormente, foi possível implementar os cálculos capazes de determinar a análise cinemática do mecanismo, em termos de posição, velocidade e aceleração angulares.

Com a aplicação da validação do código, foi possível verificar que ele foi executado sem erros, e que para todos os quatro casos aplicados o programa fez mais de 500 iterações em segundos, algo q não seria possível de se realizar manualmente. Na atual conjuntura, o código é capaz de determinar posições, angulo de transmissão e as velocidades e acelerações angulares.

Para conseguir determinar as velocidades e acelerações pontuais se faz necessário a aplicação dos cálculos descritos na sessão 3.5 desse trabalho, que demonstra o memorial de cálculos necessários para a análise. Com isso, fica o incentivo para os leitores que vierem a utilizar o código realizar a implementação dessas velocidades e acelerações pontuais, dando continuidade ao código. Afinal, o mercado de trabalho está cada dia mais tecnológico e automatizado, e ter domínio sobre um linguagem computacional pode ser um diferencial.

Além das velocidades e acelerações pontuais, existem outras oportunidades de melhoria para trabalhos futuros, como a determinação de pontos mortos e de posições limites para o ângulo de transmissão, bem como a realização de análise dinâmica.

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, E. et al. **Análise Cinemática E Dinâmica De Um Mecanismo De Quatro Barras Acelerado Utilizando Recursos Computacionais**. Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia - CONTECC'2018, p. 1–5, 2018.
- BEER, F.; JOHNSTON JR, E. R. **Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Cinemática e Dinâmica**. 5. ed. São Paulo: Makron Books, 1991.
- BOŠKOVIĆ, M.; BULATOVIĆ, R. R.; ŠALINIĆ, S.; MIODRAGOVIĆ, G. R.; BOGDANOVIĆ, G. M. **Optimization of dynamic quantities of a four-bar mechanism using the Hybrid Cuckoo Search and Firefly Algorithm (H-CS-FA)**. Archive of Applied Mechanics. (2018).
- CARVALHO, J. C. M; IBRAHIM, R. C; COELHO, T. A. H. **Mecanismos, máquinas e robôs: uma abordagem unificada para a análise e síntese**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018.
- DOUGHTY, S. **Mechanics of Machines**. 2. ed. Dubuque: [s.n.], 2019.
- FLORES, P.; CLARO, J. C. P. **Cinemática de Mecanismos**. 1. ed. Guimarães: Almedina, 2007.
- HARTENBERG, R. S.; DENAVIT, J. **Kinematic Synthesis of Linkages** (Mechanical Engineering Series). New York: McGraw-Hill, 1964.
- KIM, J.-W.; LEE, S.; SEO, T.; KIM, J. **A new non-servo motor type automatic tool changing mechanism based on rotational transmission with dual four-bar linkages**. Meccanica, (2018).
- KOCHAN, S. G. **Programming in C**. 3. ed. Indianapolis: Developer's Library, 2005.
- LIU, X.; ZHENG, X.; LI, S. **Development of a humanoid robot hand with coupling four-bar linkage**. Advances in Mechanical Engineering. vol: 9(1), (2017).
- MABIE, H. H.; REINHOLTZ, C. F. **Mechanisms and Dynamics of Machinery**. 4. ed. New York: John Wiley & Sons, 1987.
- MABIE, H. H.; OCVIRK, F. W. **Mecanismos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1980.
- MYSZKA, D. B. **Máquinas y mecanismos**. 4. ed. México: Pearson Educación, 2012.
- NORTON, R. L. **Cinemática e Dinâmica dos Mecanismos**. 1. ed. Porto Alegre: AMGH, 2010.
- SHIGLEY, J. E.; UICKER, J. J. **Theory of machines and mechanisms**. Singapura: [s.n.], 1981.
- SUN, J.; LIU, W.; CHU, J. **Synthesis of spherical four-bar linkage for open path generation using wavelet feature parameters**. Mechanism and Machine Theory, (2018).

**YILDIZ, A. Parametric synthesis of two different trunk lid mechanisms for sedan vehicles using population-based optimisation algorithms.** Mechanism and Machine Theory. (2021).

**ZHAO, D.; GE, W.; MO, X.; LI, Y.; WANG, Z. Design, Optimization and Evaluation of a New Cylinder Attachment Geometry to Improve the Hopping Height of the Bionic One-Legged Robot.** Appl. Sci. (2021).

## APÊNDICE A – CÓDIGO PARA ANÁLISE CINEMÁTICA

```

from math import radians, sin, cos, asin, atan, degrees, acos
import numpy as np

""""TCC - ANÁLISE CINAMÁTICA _ MECANISMOS DE QUATRO BARRAS:"""
print("Análise Cinemática de Mecanismos Articulados Planos de Quatro Barras:")
print("+++++")

"INPUT DOS DADOS:"
r1 = float(input("Insira o valor referente ao comprimento da barra fixa (r1): "))
r2 = float(input("Insira o valor referente ao comprimento da manivela (r2): "))
r3 = float(input("Insira o valor referente ao comprimento da barra (r3): "))
r4 = float(input("Insira o valor referente ao comprimento da barra (r4): "))

H = float(input("Insira a distância vertical entre os pontos o2 e o4 (H): "))

A2 = float(input("Insira o valor referente ao ângulo da manivela (teta 2): "))
A3 = float(input("Insira um chute inicial para o ângulo (teta 3): "))
A4 = float(input("Insira um chute inicial para o ângulo (teta 4): "))

W2 = float(input("Insira a velocidade angular (W2): "))

S2 = float(input("Insira a aceleração angular (S2): "))

impedimento = 0

print("+++++")

"CRITÉRIO DE GRASHOF."
if r2 + r3 > r4 + r1:
    print("O mecanismo é Não-Grashof.")
    impedimento = 1

else:
    print("O mecanismo atende ao Critério de Grashof")

print("+++++")

"IMPEDIMENTOS PARA A ANÁLISE CINEMÁTICA "
if r2 + r3 + r4 < r1:
    print("IMPEDIMENTO PARA ANÁLISE CINEMÁTICA: Para as dimensões fornecidas,
os links não se conectam.")
    impedimento = 1

elif r2 + r1 + r4 < r3:
    print("IMPEDIMENTO PARA ANÁLISE CINEMÁTICA: Para as dimensões fornecidas,
os links não se conectam.")
    impedimento = 1

```

```

else:
    print(f'Número de Impedimentos para a Análise: {impedimento}.')

    "CLASSIFICAÇÃO DO MECANISMO:"
    if r1 == r3 and r2 == r4:
        print("Tipo de Mecanismo: Dupla Manivela (Caso especial de Grashof) - Movimento da
cadeia indeterminado.")

    elif r1 <= r2 and r1 <= r3:
        print("Tipo de Mecanismo: Dupla Manivela.")

    elif r2 <= r1 and r2 <= r3:
        print("Tipo de Mecanismo: Manivela-balancim.")

    elif r3 <= r2 and r3 <= r1:
        print("Tipo de Mecanismo: Duplo Balancim.")

    elif r3 <= r2 and r3 <= r1 and r2 + r3 > r4 + r1:
        print("Tipo de Mecanismo: Balancim Triplo.")

    else:
        print("Não foi possível determinar o tipo de mecanismo")

print("++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++")

"Comprimentos Fornecidos:"

print(f'Comprimentos Fornecidos: r1 = {r1:.,2f}; r2 = {r2:.,2f}; r3 = {r3:.,2f}; r4 = {r4:.,2f}.')

print("++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++")

if impedimento == 0:

    contador = 0
    F1_Arred = 1
    F2_Arred = 1

    if H == 0:
        while abs(F1_Arred) > 0.0001 or abs(F2_Arred) > 0.0001 and contador:
            "Decomposição em X"
            F1 = - r1 + r2 * cos(radians(A2)) + r3 * cos(radians(A3)) - r4 * cos(radians(A4))
            F1_Arred = round(F1, 4)

            "Decomposição em Y"
            F2 = r2 * sin(radians(A2)) + r3 * sin(radians(A3)) - r4 * sin(radians(A4))
            F2_Arred = round(F2, 4)

            "Método de Newton-Raphson"
            dF1dA3 = -r3 * sin(radians(A3))
            dF1dA4 = r4 * sin(radians(A4))

```

```

dF2dA3 = r3 * cos(radians(A3))
dF2dA4 = -r4 * cos(radians(A4))

"Sistema de Equações Lineares:"
"dF1dA3 * DA3 + dF1dA4 * DA4 = -F1"
"dF2dA3 * DA3 + dF2dA4 * DA4 = -F2"

"Sistema Reescrito na Forma Matricial"
mA = np.array([[dF1dA3, dF1dA4], [dF2dA3, dF2dA4]])
mB = np.array([-F1], [-F2])

"mA_inversa = np.linalg.inv(mA)"
"mXY = np.dot(mA_inversa, mB)"

mXY = np.linalg.solve(mA, mB)

DA3 = np.around(mXY[0], 10)
DA4 = np.around(mXY[1], 10)

D_DA3 = A3 + DA3
D_DA4 = A4 + DA4

A3 = D_DA3
A4 = D_DA4

contador += 1

print("++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++")

print("Convergência e Número de Iterações:")

print(f'F1= {F1:.,4f}.')
print(f'F2= {F2:.,4f}.')
print(f'NO= {contador}.')

print("++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++")

print("Análise de Posição:")

print(f'A2= {A2:.,3f}.')
print(f'A3= {A3}.')
print(f'A4= {A4}.')

if contador >= 50000:
    F1_Arred = 0
    F2_Arred = 0

```

```

else:
    while abs(F1_Arred) > 0.0001 or abs(F2_Arred) > 0.0001:

        Ah = asin(H / r1)
        Ah_arred = round(Ah, 3)

        "Decomposição em X"
        F1 = - r1 * cos(Ah) + r2 * cos(radians(A2)) + r3 * cos(radians(A3)) - r4 *
cos(radians(A4))
        F1_Arred = round(F1, 4)

        "Decomposição em y"
        F2 = r1 * sin(Ah) + r2 * sin(radians(A2)) + r3 * sin(radians(A3)) - r4 *
sin(radians(A4))
        F2_Arred = round(F2, 4)

        "Método de Newton-Raphson"
        dF1dA3 = -r3 * sin(radians(A3))
        dF1dA4 = r4 * sin(radians(A4))

        dF2dA3 = r3 * cos(radians(A3))
        dF2dA4 = -r4 * cos(radians(A4))

        "Sistema de Equações Lineares:"
        "dF1dA3 * DA3 + dF1dA4 * DA4 = -F1"
        "dF2dA3 * DA3 + dF2dA4 * DA4 = -F2"

        "_Sistema Reescrito na Forma Matricial_"
        mA = np.array([[dF1dA3, dF1dA4], [dF2dA3, dF2dA4]])
        mB = np.array([[-F1], [-F2]])

        mXY = np.linalg.solve(mA, mB)

        DA3 = np.around(mXY[0], 10)
        DA4 = np.around(mXY[1], 10)

        D_DA3 = A3 + DA3
        D_DA4 = A4 + DA4

        A3 = D_DA3
        A4 = D_DA4

        contador += 1

print("++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++")

print("Convergência e Número de Iterações:")

```



```

print(f'S2= {S2:.,3f}.')
print(f'S3= {S3:.,3f}.')
print(f'S4= {S4:.,3f}.')

print("++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++")

print("Angulo de Transmissão")

if H == 0:

    r2y = r2 * sin(radians(A2))
    r2x = r2 * cos(radians(A2))

else:

    aH = degrees(asin(H/r1))

    r2y = r2 * sin(radians(A2+aH))
    r2x = r2 * cos(radians(A2+aH))

    Coz = r2y
    Caz = r1 - r2x

    AZ4 = degrees(atan(Coz/Caz))

    Z = Coz/sin(radians(AZ4))

    yn = (pow(r3, 2) + pow(r4, 2) - pow(Z, 2)) / (2 * r3 * r4)

    YY = degrees(acos(yn))

    print(f'YY= {YY:.,3f}.')

    print("Fim!")

else:

    print("O código chegou ao seu limite máximo de 50000 iterações e não conseguiu chegar
a um resultado para "
        " os dados fornecidos")

else:

    print("Fim!")

```

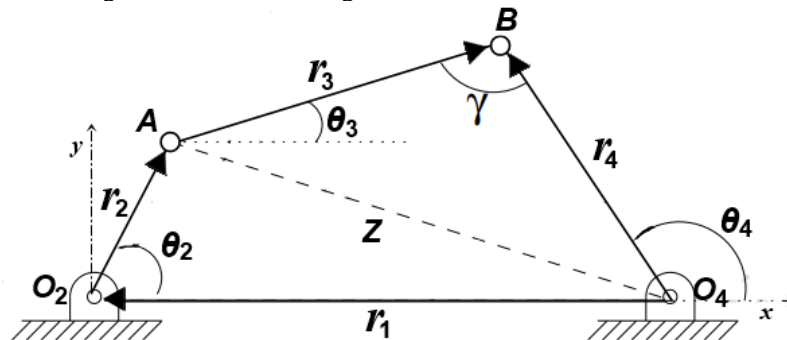
## APÊNDICE B – INFORMAÇÕES PERTINENTES AO USUÁRIO DO CÓDIGO

Para sua execução, o código necessita de algumas informações referentes ao mecanismo de quatro barras a ser avaliado, sendo: as dimensões dos links  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  e  $r_4$ ; o ângulo  $\theta_2$ ; os chutes iniciais para os ângulos  $\theta_3$  e  $\theta_4$ ; a velocidade angular  $\omega_2$ ; a Aceleração angular  $\alpha_2$  e, caso o link fixo não esteja na horizontal, a altura  $h$ .

No código essas variáveis estão escritas como:  $r_1 = r1$ ,  $r_2 = r2$ ,  $r_3 = r3$ ;  $r_4 = r4$ ;  $\theta_2 = A2$ ;  $\theta_3 = A3$ ;  $\theta_4 = A4$ ;  $\omega_2 = W2$ ;  $\alpha_2 = S4$  e  $h = H$ .

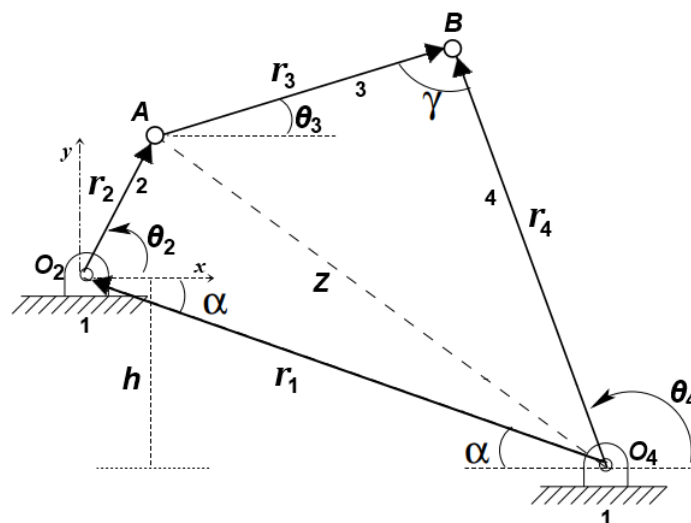
Como não são estabelecidos padrões de medida para esses valores, para que o código seja executado da forma correta, todas as medidas inseridas devem estar no mesmo padrão de unidades.

Figura 23 – Mecanismo genérico com link fixo na horizontal



Fonte: (Próprio autor).

Figura 24 – Mecanismo genérico com diferença de altura entre as extremidades do link fixo



Fonte: (Próprio autor).

Os Pontos  $o_2$  e  $o_4$  faz referência aos pares cinemáticos presentes na barra fixa, em que “o” vem da palavra *origin*.