



UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DAS TECNOLOGIAS
CURSO DE BACHARELADO EM FÍSICA

Cezar Rodrigues de Souza

Dinâmica de Interação em Sistema Trímico Óptico com Simetria $\mathcal{PT}$

Barreiras, Bahia
27 de março de 2024

Cezar Rodrigues de Souza

Dinâmica de Interação em Sistema Trímero Óptico com Simetria $\mathcal{PT}$

Monografia apresentado ao curso de bacharelado em Física, como requisito para a aprovação na componente curricular CET0318-Trabalho de Conclusão de Curso III e obtenção do título de bacharel(a) em Física, pelo Centro de Ciências Exatas e das Tecnologias da Universidade Federal do Oeste da Bahia

Centro de Ciências Exatas e das Tecnologias
Universidade Federal do Oeste da Bahia
Curso de Bacharelado em Física

Orientador: Elias Brito Alves Junior

Barreiras, Bahia
27 de março de 2024

FICHA CATALOGRÁFICA

S729 Souza, Cézar Rodrigues de.

Dinâmica de interação em sistema trímico óptico com simetria PT. / Cézar Rodrigues de Souza. – 2024.

41f.

Orientador: Prof. Dr. Elias Brito Alves Junior.

Monografia (Graduação) – Bacharelado em Física. Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias. Barreiras, BA, 2024.

1. Ressonadores acoplados. 2. Eletrodinâmica. 3. Óptica. I. Alves Junior, Elias Brito. II. Universidade Federal do Oeste da Bahia - Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias. III. Título.

CDD 530

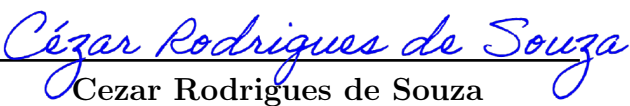
Biblioteca Universitária de Barreiras - UFOB

Cezar Rodrigues de Souza

Termo de Anuência do Orientador

Eu (Elias Brito Alves Junior) aceito o compromisso de orientar e acompanhar (Cezar Rodrigues de Souza) na condução dos trabalhos de pesquisa para elaboração do Trabalho de Conclusão de Curso, visando à obtenção do título de Bacharel(a) em Física.

Elias Brito Alves Junior
Orientador


Cezar Rodrigues de Souza
Assinatura do discente

Barreiras, Bahia
27 de março de 2024

Agradecimentos

A Deus, por ter me proporcionado saúde e coragem durante essa jornada.

A minha família, exclusivamente ao meu pai Edvaldo que partiu durante esse processo e a minha mãe Maria Eunice, sem os quais este trabalho não teria se concretizado. Aos meus irmãos, Ricardo, Iara e Douglas que me apoiaram.

Ao meu orientador Prof^ª Elias Brito, por todo suporte, paciência e ensinamentos. Agradeço por ter aceito me orientar e pela disponibilidade quando necessário. A todo corpo docente que contribuiu para este processo de formação.

Aos meus amigos de república que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação. Aos meus amigos de curso, José Wilson, Adailton, Gabriel e Márcio.

E por fim, gostaria de agradecer a instituição UFOB por todo apoio.

Resumo

A interação entre cavidade e campo em sistemas quânticos $\mathcal{PT}$ -simétricos tem sido amplamente estudada nos últimos anos. No presente trabalho, analisamos a dinâmica fotônica entre três cavidades acopladas que descrevem um sistema trímico óptico com perda e ganho balanceados sujeitas a interação de um campo eletromagnético semi-clássico. Análisamos o efeito do campo combinado com os efeitos de perda e de ganho das cavidades e observamos numericamente a transição de fase $\mathcal{PT}$ -simétrica, ajustando a frequência do campo e analisando a quebra espontânea de simetria. Analisamos também que, na fase de simetria quebrada, o campo se localiza com maior intensidade na cavidade ativa devido ao seu efeito de ganho, levando uma inversão da população e, conseqüentemente, ao crescimento nas amplitudes da função de onda e no aumento da probabilidade do salto fotônico entre as cavidades. Também ilustramos, mesmo na presença do campo, o comportamento de transmissão fotônica assimétrica em ambas as fases com relação a cavidade neutra.

Palavras-chave: Ressonadores acoplados, Eletrodinâmica, Óptica

Sumário

1	INTRODUÇÃO	7
2	SIMETRIA E LEIS DE CONSERVAÇÃO	9
3	MECÂNICA QUÂNTICA HERMITIANA	10
3.1	Postulados da Mecânica Quântica	10
3.1.1	Primeiro Postulado	10
3.1.2	Segundo Postulado	11
3.1.3	Terceiro Postulado	11
3.1.4	Quarto Postulado	11
3.2	Produto Interno e Ortonormalidade	12
3.3	Unitariedade e Evolução Temporal	12
4	TEORIA DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	14
4.1	Descrição Clássica do Campo	14
4.2	Teoria Potencial para o Campo Eletromagnético Clássico	16
4.3	Quantização do Campo	17
4.4	Interação entre Radiação e Matéria	17
4.4.1	Modelo de Jaynes Cummings	18
5	MECÂNICA QUÂNTICA $\mathcal{PT}$ -SIMÉTRICA	19
5.1	Hamiltonianos $\mathcal{PT}$ -Simétricos	19
5.2	O Produto Interno e Ortonormalidade das Funções	20
5.3	Unitariedade	22
5.4	Sistemas $\mathcal{PT}$ Simétricos Abertos e Fechados	23
6	SISTEMA DE INTERAÇÃO CAVIDADE - CAMPO	24
6.1	Dinâmica na Ausência do Campo	24
6.1.1	Dinâmica na Fase $\mathcal{PT}$ -Simétrica Inteira	26
6.1.2	Dinâmica na Fase $\mathcal{PT}$ -Simétrica Quebrada	28
6.2	Dinâmica de Interação Cavidade - Campo Elétrico	30
6.2.1	Dinâmica na Fase $\mathcal{PT}$ - Simétrica Inteira	31
6.2.2	Dinâmica na Fase $\mathcal{PT}$ -Simétrica Quebrada	33
7	CONCLUSÃO	36

	REFERÊNCIAS	37
A	APÊNDICE - ALGORITMO EM PYTHON	39

1 Introdução

Um sistema que apresenta uma simetria $\mathcal{PT}$ é aquele tal que é invariante mediante a atuação dos operadores de paridade $\mathcal{P}$ e de reversão temporal $\mathcal{T}$. O princípio da paridade afirma que as leis da natureza são invariantes sob a reflexão do espaço, isto é, que a imagem espelhada de um objeto é um objeto possível na natureza (ULBRICHT, 1959). Com relação ao princípio da reversão temporal, se dada uma configuração inicial de um sistema em um determinado estado em um momento específico, a reversão temporal irá refletir esse estado em relação a algum ponto no tempo.

O estudo da simetria $\mathcal{PT}$ assume grande relevância para o desenvolvimento científico e tecnológico. O seu estudo se deu experimentalmente (CHTCHELKATCHEV et al., 2012) e de maneira teórica (HANG; HUANG; KONOTOP, 2013) em vários sistemas físicos, desde experimentos baseados em circuitos eletrônicos (BENDER et al., 2013), cavidades de microondas (BITTNER et al., 2012), até em estudos de ressonância magnética nuclear (ZHENG; HAO; LONG, 2013). Nessa perspectiva, os sistemas ópticos ganharam relevância como dispositivos versáteis para estudar a simetria $\mathcal{PT}$ e explorar a invisibilidade unidirecional e transparência induzidas por perdas.

O sistema de cavidades acopladas tem sido amplamente utilizado para controlar de forma coerente a transferência de fótons. Em (LI et al., 2015), concluiu que presença de um único fóton em um sistema, impulsionado por um campo coerente, dificultará o acoplamento dos fótons subsequentes devido a forte não-linearidade presente no próprio sistema quântico. Em diferentes configurações de sistemas de três níveis, foi observado a amplificação do campo sem inversão de população (KOCHAROVSKAYA; ROSTOVTSEV; IMAMOGLU, 1998). Para o sistema de três níveis, onde é colocado um campo de sondagem, ao escolher adequadamente a intensidade do campo de bombeamento, o campo de sondagem exibe amplificação sem inversão da população (SUN et al., 2005).

Neste trabalho, focamos em um trímico óptico com simetria $\mathcal{PT}$ interagindo com um campo eletromagnético (CE) de modo único. Em primeiro caso, baseamos no trabalho do (XUE et al., 2017), onde a dinâmica fotônica no trímico óptico é estudado na ausência do campo. Desse modo, o sistema que estudamos consiste em uma cavidade ativa sujeita a ganho, uma cavidade de perda passiva, que simultaneamente se acoplam a uma terceira cavidade que está neutra e um CE de modo único interagindo com este sistema de cavidades. Foi analisado a quebra de simetria $\mathcal{PT}$ espontânea do sistema.

Ao saber da transição de fase $\mathcal{PT}$, estudamos a evolução dinâmica do sistema na fase de simetria (onde todos os autovalores são reais), e fora de fase de simetria (onde surgem os

autovalores complexos). Na aproximação semi-clássica, desconsideramos o efeito do ruído quântico que interfere na correlação fotônica (AGARWAL; QU, 2012), estudamos a contribuição do CE combinada com os efeitos de ganho e de perda e analisamos o comportamento do sistema resolvendo numericamente a equação de Schrödinger dependente do tempo.

Desse modo, no capítulo 3 iremos revisar os conceitos básicos da mecânica quântica hermitiana que são fundamentais para a compreensão dos resultados obtidos. No cap. 4, abordamos brevemente os conceitos básicos da teoria do CE e suas propriedades que serão úteis no desenvolvimento do presente trabalho. No cap. 5, abordamos as propriedades fundamentais da mecânica quântica $\mathcal{PT}$ -simétrica e suas propriedades que diferem das propriedades postas pela mecânica quântica hermitiana. No cap. 6, apresentamos o trabalho realizado por (XUE et al., 2017) e, com base neste trabalho, analisamos a dinâmica fotônica no trímico óptico com simetria $\mathcal{PT}$ interagindo com o campo semi-clássico na fase de simetria e na quebra de simetria $\mathcal{PT}$. Concluimos no cap. 7.

2 Simetria e Leis de Conservação

Considerações de simetria e invariância, e mesmo leis de conservação, desempenharam um papel importante no desenvolvimento do pensamento sobre a física. Em (NOETHER, 1918), Noether descobriu a justificativa mais fundamental para as leis de conservação. Partindo do seu trabalho, é possível afirmar que, para cada operação de simetria, existe uma lei de conservação correspondente. Assim como a conservação do momento está relacionada com a homogeneidade de espaço, de tal modo, a invariância sob translação no tempo significa que a lei de conservação de energia é válida. Dessa forma, dizer que determinada coisa é simétrica é dizer que, ao submetê-la a uma operação, ela aparecer exatamente a mesma após esta operação e esta é uma característica, em geral, de sistemas que conservam quantidades físicas fundamentais, como energia, momento, momento angular, etc., que são princípios de conservação na formulação lagrangiana e hamiltoniana da mecânica clássica.

Na mecânica quântica, simetrias de tais sistemas podem influenciar seus estados acessíveis, espectro de energia e até mesmo a probabilidade de transições entre esses estados. Tais sistemas apresentam quantidades conservadas. Aos que apresentam uma lei de movimento independente no tempo, a quantidade conservada é a energia. Aos que apresentam uma lei de movimento sem dependência angular, a quantidade conservada é o momento angular. Se um sistema físico se caracteriza por estados definidos, determinadas simetrias permitem que o sistema evolua sem mudar seu estado. Na perspectiva óptica, ela pode influenciar a formação de imagens e a propagação de luz desses sistemas (ZYABLOVSKY et al., 2014). Aspectos cruciais da simetria na óptica, como Simetria de Forma, Simetria de Reflexão, Simetria Rotacional e Simetria de Propagação da Luz estabelecem uma importante relação em sistemas influenciados da interação da luz e de materiais de natureza óptica. Além disso, sistemas que apresentam a simetria $\mathcal{PT}$ (paridade-tempo) podem exibir uma quebra espontânea dessa simetria, na qual a realidade dos autovalores é perdida. No estudo da eletrodinâmica clássica de um meio sujeito a perda e ganho, a simetria $\mathcal{T}$ é matematicamente quebrada, enquanto a eletrodinâmica quântica é simétrica em $\mathcal{T}$ (CHONG; GE; STONE, 2011). Desse modo, a simetria conjunta $\mathcal{PT}$ é preservada em sistemas ópticos por meio de regiões onde há perdas e ganhos balanceados e a característica do operador $\mathcal{P}$ transforma estas regiões umas nas outras por efeito de paridade. A atuação combinada $\mathcal{PT}$, que alterna perdas e ganhos, torna o sistema invariante. Já a quebra dessa simetria acontece em parâmetros de ajuste no hamiltoniano que descreve tais sistemas, levando a reprodução de autovalores complexos.

3 Mecânica Quântica Hermitiana

É sabido que na mecânica quântica, a hamiltoniana é o operador que descreve a evolução temporal de um sistema físico quântico. Uma característica importante deste operador é sua hermiticidade ($\hat{H}^\dagger = \hat{H}$), onde o símbolo ($\dagger$) denota o operador adjunto. Isto é, um operador linear em um espaço vetorial com produto interno que é adjunto de si mesmo (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1986). Esta imposição requer que os autovalores de $\hat{H}$, e portanto, os níveis de energia do sistema sejam reais. Deste modo, tal imposição também garante que o sistema evolua de maneira unitária, o que implica na preservação das probabilidades derivadas desta hamiltoniana (BENDER, 2007).

Entretanto, apesar que a condição de hermiticidade ser uma condição suficiente para garantir a obtenção de autovalores reais, ela por si só não é necessária. Assim, é possível construir uma teoria quântica com hamiltonianas que, apesar de não terem presentes a condição de hermiticidade, as mesmas possuem autovalores que sejam reais e que levem a uma evolução unitária do sistema.

3.1 Postulados da Mecânica Quântica

A mecânica quântica estabelece alguns postulados que descrevem, tanto o processo de medição, quanto o processo de evolução de determinados sistemas físicos. Desse modo, compreender como se dá estes postulados é de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho. Usando como base a referência (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1986), pode-se definir tais postulados.

3.1.1 Primeiro Postulado

O primeiro postulado ressalta descrição matemática dos estados físicos de um sistema quântico, assim como o princípio de superposição.

- **Primeiro Postulado:** Em um dado tempo fixo t_0 , o estado de um sistema físico é descrito por um ket $|\psi(t_0)\rangle$ pertencente ao espaço de Hilbert.

Desse modo, se tem que um espaço vetorial é dito um espaço de Hilbert se o produto interno é bem definido e se for completo em relação a métrica induzida por este produto

interno. Isso significa que há uma convergência das normas de Cauchy para elementos do próprio espaço. (KREYSZIG, 1991)

3.1.2 Segundo Postulado

O segundo postulado retrata a descrição das quantidades físicas mensuráveis.

- **Segundo Postulado:** Toda quantidade física mensurável $\mathcal{A}$ é descrita por um operador hermitiano $\hat{A}$ atuando no espaço de Hilbert; este operador é um observável.

Para uma melhor especificação, este operador $\hat{A}$ é tal que

$$\langle \alpha | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A}^\dagger | \alpha \rangle^* \quad (3.1)$$

Para quaisquer $|\psi\rangle$ e $|\alpha\rangle$ pertencentes ao espaço de estados. Portanto, um operador $\hat{A}$ é dito hermitiano se satisfaz a relação

$$\langle \alpha | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \alpha \rangle^* \quad (3.2)$$

de modo que $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$.

3.1.3 Terceiro Postulado

Esse postulado descreve a medição de quantidades físicas e é conhecido como medição von Neumann.

- **Terceiro Postulado:** O único resultado possível de uma medição de uma quantidade física $\mathcal{A}$ é um dos autovalores do observável correspondente A . Se a medição for realizada sobre o estado $|\psi\rangle$, o autovalor a_n assume probabilidade

$$P(a_n) = |\langle a_n | \psi \rangle|^2 \quad (3.3)$$

de ser medido. Com isso, o sistema passa do estado $|\psi\rangle$ para o autoestado $|a_n\rangle$ de A .

3.1.4 Quarto Postulado

Compreendendo como se dá a medição dos sistemas quânticos, é de grande importância compreender como se dá a evolução temporal desses sistemas e o quarto postulado estabelece essa evolução.

- **Quarto Postulado:** A evolução temporal de um sistema físico é determinada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (3.4)$$

onde $H(t)$ é o operador Hamiltoniano associado e energia total do sistema.

3.2 Produto Interno e Ortonormalidade

Na mecânica quântica, o produto interno assume uma grande relevância, pois tal operação matemática é utilizada para calcular a sobreposição entre dois estados quânticos e é uma generalização do conceito de produto interno definido na álgebra linear. No espaço de Hilbert, esse produto é definido por

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_n^\dagger(x) \psi_m(x) \quad (3.5)$$

Para que o significado físico seja preservado, este produto interno deve ser positivo definido, $\langle \psi_n | \psi_m \rangle \geq 0$ e os estados em questão devem ser ortonormalizados, de modo que

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm} \quad (3.6)$$

Quando as autofunções forem normalizadas e pertencerem a estados distintos, tem-se que $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = 0$, como indica a delta de Kronecker.

3.3 Unitariedade e Evolução Temporal

A evolução temporal do estado de um sistema pode ser descrita por meio de um operador, chamado de operador de evolução temporal e que pode ser representado por $\hat{U}(t, t_0)$. Este operador tem como função evoluir o sistema de um dado estado inicial $|\psi(t_0)\rangle$ a um estado final $|\psi(t)\rangle$ por meio da atuação

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (3.7)$$

que, substituindo na equação de Schrodinger dependente do tempo, tem-se

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0) \quad (3.8)$$

Uma vez que a hamiltoniana não tem dependência temporal, a equação acima escrita em termos do operador de evolução temporal é uma equação diferencial de primeira ordem cuja solução é a própria expressão para o operador de evolução temporal, dada por

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} \quad (3.9)$$

Esse operador de evolução temporal, uma vez que ele obedece a equação de Schrodinger, sua unitariedade é preservada ao longo do tempo. Desse modo,

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}^{-1}(t, t_0) \quad (3.10)$$

Portanto,

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0)\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}^{-1}(t, t_0)\hat{U}(t, t_0) = 1 \quad (3.11)$$

Diante disso, conclui-se que a norma do estado foi conservado mediante a uma transformação unitária.

4 Teoria do Campo Eletromagnético

A descrição da quantização do campo eletromagnético é de suma importância para o estudo de eletrodinâmica em cavidades. Como essa quantização é baseada na ideia de que as oscilações do campo eletromagnético podem ser descritas em termos de modos de ressonância, semelhantes aos modos de ressonância em cavidades, essa discussão será fundamental para o presente trabalho. Para uma leitura mais abrangente, tem-se (LAMBROPOULOS, 2007)

4.1 Descrição Clássica do Campo

A descrição clássica do campo eletromagnético é descrito pelas equações de Maxwell, onde, na ausência de fontes, podem ser descritas como

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

onde $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ é a velocidade de propagação da luz no vácuo. Na presença de cargas e de corrente de condução

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (4.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \quad (4.4)$$

onde μ_0 e ϵ_0 são a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do vácuo respectivamente. $\vec{E}$ é o campo elétrico e $\vec{B}$ o campo magnético, $\vec{J}$ a densidade de corrente e ρ de carga que estão relacionadas pela equação da continuidade

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.5)$$

Desse modo, partindo dessas equações, é possível extrair as equações para o campo elétrico e magnético:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

Dessa forma, os vetores campo elétrico e campo magnético que obedecem as equações de onda assumem as formas

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \mathbf{r}_1 \quad (4.6)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \mathbf{r}_2 \quad (4.7)$$

onde $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ são vetores unitários, E_0 e B_0 são as amplitudes complexos de onda, $\vec{k}$ é o vetor de onda que define a direção de propagação de onda e ω é a frequência da radiação emitida. A contrinuição energética do campo elétrico para a onda eletromagnética é idêntica à contrinuição do campo magnético. Desse modo, o hamiltoniano cáassico assume a formulação

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \int_V dV \left[\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \quad (4.8)$$

$$= \int_V dV \left[\epsilon \dot{\vec{E}}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{E}}(\vec{r}, t) \right] \quad (4.9)$$

Escolhendo o eixo z como a direção de propagação da onda ($\vec{k} = k\hat{z}$), o campo elétrico no eixo x e fazendo a exigência que ambos assumam apenas valores reais, tem-se:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{x} \quad (4.10)$$

$$\vec{B}(z, t) = B_0 \cos(kz - \omega t) \hat{y} \quad (4.11)$$

Da equação 4.8, é possível escrever

$$\vec{E}(z, t) = E_0 [\cos(kz) \cos(\omega t) + \sin(kz) \sin(\omega t)] \quad (4.12)$$

Definindo as funções

$$q(t) = \frac{E_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (4.13)$$

$$p(t) = E_0 \cos(\omega t) \quad (4.14)$$

Desse modo, o campo elétrico pode ser escrito como sendo

$$\vec{E}(z, t) = [q(t)\omega \sin(kz) + p(t) \cos(kz)] \quad (4.15)$$

Como a análise é feita sobre um volume V , é possível impor as condições periódicas acerca deste volume, sendo $V = L^3$, e assim o campo passa a ser $\vec{E}(z, t) = \vec{E}(z + L, t)$ e o módulo do vetor de onda assume valores quantizados $k_j = \frac{2\pi j}{L}$, com $j = 1, 2, 3, \dots$. Portanto, a solução geral para o campo elétrico é:

$$\vec{E}(z, t) = \sum_j E_j(z, t) = \sum_j [q_j(t)\omega_j \sin(k_j z) + p_j(t) \cos(k_j z)] \hat{x} \quad (4.16)$$

O hamiltoniano clássico, por fim, resulta em

$$H_j = \frac{1}{2} [Q_j^2(t)\omega_j^2 + P_j^2(t)] \quad (4.17)$$

Com

$$Q_j^2(t) = (\epsilon_0 V)^{\frac{1}{2}} q_j(t) \quad (4.18)$$

$$P_j^2(t) = (\epsilon_0 V)^{\frac{1}{2}} p_j(t) \quad (4.19)$$

Desse modo, associa-se $Q_j(t)$ como coordenada generalizada e $P_j(t)$ como o momento generalizado.

4.2 Teoria Potencial para o Campo Eletromagnético Clássico

A equação de Maxwell 4.2 se $\vec{B}$ puder se escrito em termos do potencial vetor $\vec{A}$, de modo que

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad (4.20)$$

De maneira análoga, a equação 4.3 se um potencial escalar ϕ puder ser definido de modo que

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.21)$$

Fazendo a utilização das equações de Maxwell e as definições para os potenciais, chega-se a duas novas relações que determinam estes potenciais:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla\phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{J}, \quad (4.22)$$

$$-\epsilon_0 \nabla^2 \phi - \epsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \rho \quad (4.23)$$

Se $\vec{A}$ e ϕ forem conhecidos, os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ podem ser determinados. Pode-se encontrar mais que um potencial vetor ou escalar que produzem os mesmos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Outros

potenciais $\vec{A}$ e ϕ que podem ser utilizados para obter os mesmos campos são obtidos através de transformações de calibre, dadas por:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 - \nabla\eta, \quad (4.24)$$

$$\phi = \phi_0 + \frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad (4.25)$$

onde η é uma função arbitrária que tem dependência de $\vec{r}$ e de t . Algumas condições especiais ainda podem ser atribuídas a $\vec{A}$ e ϕ , de modo que estes obedeçam as transformações apresentadas, chamadas de condições de calibre e os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ se tornam invariantes em relação à sua escolha.

4.3 Quantização do Campo

A quantização do campo é feita mediante a identificação de $Q_j(t)$ e $P_j(t)$ como sendo operadores $\hat{Q}_j(t)$ e $\hat{P}_j(t)$ que satisfazem as relações de comutação abaixo:

$$[\hat{Q}_j, \hat{P}_k] = i\hbar\delta_{jk}, \quad (4.26)$$

$$[\hat{Q}_j, \hat{Q}_k] = [\hat{P}_j, \hat{P}_k] = 0 \quad (4.27)$$

Introduzindo os seguintes operadores, que também obedecem as relações de comutação,

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_j}}(\omega_j\hat{Q}_j + i\hat{P}_j), \quad (4.28)$$

$$a_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_j}}(\omega_j\hat{Q}_j - i\hat{P}_j) \quad (4.29)$$

é possível associar o hamiltoniano clássico como funções dos operadores a_j e $a_j^\dagger$:

$$H_j = \hbar\omega_j \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right) \quad (4.30)$$

E por fim, o hamiltoniano total correspondente a onda eletromagnética submetida as condições de contorno periódica assume a seguinte forma:

$$H = \sum_j \hbar\omega_j \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right) \quad (4.31)$$

onde $a_j^\dagger$ e a_j são os operadores de criação e aniquilação respectivamente.

4.4 Interação entre Radiação e Matéria

Um dos tópicos mais relevantes da mecânica quântica é a descrição da espectroscopia no que se refere ao estudo da matéria através da sua interação com a radiação eletromagnética.

De modo clássico, tais interações entre luz e matéria são resultado de uma oscilação do campo eletromagnético interagindo de maneira ressonante com partículas carregadas.

4.4.1 Modelo de Jaynes Cummings

No tratamento entre a radiação e matéria, o modelo mais simples é composto por um modo do campo eletromagnético e um átomo de dois níveis. A dinâmica deste sistema é dada pelo hamiltoniano de Jaynes-Cummings (JAYNES; CUMMINGS, 1963)

$$H_{JC} = \omega_0 a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + g_0 (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) \quad (4.32)$$

onde os termos representam a evolução livre do campo e do átomo e o hamiltoniano de interação de dipolo. A constante $g_0 = d \sqrt{\frac{\omega_0}{2\epsilon_0 V}}$ representa o acoplamento átomo-campo, d o momento de dipolo elétrico e V o volume da cavidade. Essa interação descreve a troca de um *quantum* de energia entre o átomo e o modo da cavidade a uma certa taxa que, para este caso, é dada por g_0 . Os operadores de criação e aniquilação são escritos como $\sigma_\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$, sendo $\sigma_{x,y,z}$ os operadores de Pauli.

Para o caso geral, onde $N \geq 2$ átomos de dois níveis idênticos interagindo com o modo da cavidade, a dinâmica é descrita pelo hamiltoniano de Tavis-Cummings (TAVIS; CUMMINGS, 1968)

$$H_{TC} = \omega_0 a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2} S_z + g_0 (a^\dagger S_- + a S_+) \quad (4.33)$$

que basicamente é uma extensão do modelo de Jaynes-Cummings, sendo $S_{z,\pm} = \sum_{j=1}^N \sigma_{z,\pm}^j$ representando os operadores atômicos e $\sigma_{z,\pm}^j$ os operadores do j -ésimo átomo.

5 Mecânica Quântica $\mathcal{PT}$ -Simétrica

Em 1998, Bender e Boetcher propuseram a substituição da condição de hermiticidade por uma condição com um caráter análogo, chamado de simetria $\mathcal{PT}$, de modo que

$$\mathcal{PT}H\mathcal{PT}^{-1} = H \quad (5.1)$$

onde, neste contexto, $\mathcal{P}$ se refere ao operador paridade, enquanto $\mathcal{T}$ se refere ao operador de inversão temporal (BENDER; BOETTCHER, 1998). Essa substituição da condição de hermiticidade garantia que os níveis de energia do sistema se mantivessem reais. Para o caso de um hamiltoniano H , sendo ele hermitiano ou não, ser dito $\mathcal{PT}$ simétrico é quando H comuta com o operador $\mathcal{PT}$,

$$[H, \mathcal{PT}] = 0 \quad (5.2)$$

. Portanto, uma vez introduzido o conceito do operador $\mathcal{PT}$, é pertinente definir o efeito dos operadores paridade e inversão temporal sobre os operadores posição x e momento p (considerando o caso tridimensional):

$$\hat{x} \rightarrow -\hat{x}, \quad \hat{p} \rightarrow -\hat{p} \quad (5.3)$$

Com isso, ação de $\mathcal{P}$ é inverter o sinal de todas as componentes espaciais e do momento da partícula em questão. O operador $\mathcal{P}$ é portanto linear, unitário e Hermitiano, de modo que

$$\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}, \quad \mathcal{P}^2 = I \quad (5.4)$$

com I a matriz identidade. O operador inversão temporal $\mathcal{T}$ é definido pelas seguintes ações

$$\hat{x} \rightarrow \hat{x}, \quad \hat{p} \rightarrow -\hat{p}, \quad i \rightarrow -i \quad (5.5)$$

e, deste modo, o operador $\mathcal{T}$ transforma apenas as componentes do operador momento e troca uma constante arbitrária complexa pelo seu complexo conjugado. Essa troca com relação a coordenada complexa foi proposta pelo Wigner, de modo que a equação de Schrödinger o tornasse invariante mediante a operação de paridade-tempo. O operador de reversão temporal é então antilinear, antiunitário e $\mathcal{T}^2 = 1$ (SAKURAI; NAPOLITANO et al., 2014).

5.1 Hamiltonianos $\mathcal{PT}$ -Simétricos

Uma vez compreendido como se dá a atuação e as propriedades dos operadores $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$, é válido entender a construção de um hamiltoniano $\mathcal{PT}$ simétrico, mediante atuação do

operador conjunto $\mathcal{PT}$. Considerando um hamiltoniano dado por

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \quad (5.6)$$

onde $V(\mathbf{x})$ é um potencial complexo, a atuação do operador conjunto $\mathcal{PT}$ será

$$\mathcal{P}^\dagger \mathcal{T}^\dagger H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \mathcal{PT} = H^*(-\mathbf{x}, \mathbf{p}, -t) \quad (5.7)$$

Mas essa não é uma condição suficiente, visto que essa atuação não torna $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ invariante sob paridade e inversão temporal. Desse modo, deve-se ter:

$$[H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \mathcal{PT}] = 0 \quad \Rightarrow \quad H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = H^*(-\mathbf{x}, \mathbf{p}, -t) \quad (5.8)$$

Logo, essa condição implica numa transformação necessária (mas não suficiente) acerca do potencial que deixará o hamiltoniano $\mathcal{PT}$ -simétrico, resultando em

$$V(\mathbf{x}) = V^*(-\mathbf{x}) \quad (5.9)$$

Esse estudo da hermiticidade dos operadores hamiltonianos é mais explícito no trabalho (BENDER; BOETTCHER, 1998).

Desse modo, uma das principais características desses hamiltonianos é que seus autovalores são reais. É possível, de acordo com as equações 5.8 e 5.9, extrair um conjunto de autofunções que são comuns a H e $\mathcal{PT}$, denotada por ϕ , de maneira que respectivas equações de autovalor para tais operadores são $H\phi = E\phi$ e $\mathcal{PT}\phi = \lambda\phi$. Desse modo, de acordo com (BENDER; BRODY; JONES, 2003):

$$\begin{aligned} H\phi &= E\phi & \mathcal{PT}\phi &= \lambda\phi \\ \mathcal{PT}H\phi &= \mathcal{PT}E\phi & \mathcal{PT}\mathcal{PT}\phi &= \mathcal{PT}\lambda\phi \\ H\mathcal{PT}\phi &= E^*\mathcal{PT}\phi & \mathcal{P}^2\mathcal{T}^2\phi &= \lambda^*\mathcal{PT}\phi \\ H\phi &= E^*\phi & \phi &= \lambda^*\lambda\phi \\ E &= E^* & |\lambda|^2 &= 1 \end{aligned}$$

Portanto, das equações acima, pode-se concluir que quando o operador hamiltoniano é $\mathcal{PT}$ -simétrico seus autovalores são puramente reais.

5.2 O Produto Interno e Ortonormalidade das Funções

Com a condição de hermiticidade imposta, o produto interno na mecânica quântica $\mathcal{PT}$ simétrica é definido como sendo

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle_{\mathcal{PT}} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\psi_n(x)]^{\mathcal{PT}} \psi_m(x) dx$$

$$\begin{aligned}\langle \psi_n | \psi_m \rangle_{\mathcal{PT}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathcal{PT} \psi_n(x)] \psi_m(x) dx \\ \langle \psi_n | \psi_m \rangle_{\mathcal{PT}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(-x)^* \psi_m(x) dx\end{aligned}\tag{5.10}$$

Considerando que as funções $\psi_n(x)$ e $\psi_m(x)$ são autoestados e soluções da equação de Schrodinger, com os distintos autovalores, o produto interno entre essas funções de onda é nulo, para $n \neq m$. De maneira contraintuitiva, a norma dos estados $\psi_n(x)$ é diferente, sendo definida como (BENDER; WANG, 2001):

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle_{\mathcal{PT}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(-x)^* \psi_m(x) dx = (-1)^n \tag{5.11}$$

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle_{\mathcal{PT}} = (-1)^n \delta_{mn} \tag{5.12}$$

Nota-se que, para n ímpares, há estados com norma negativa, de modo que para n pares, há estados com norma positiva definida. Desse modo, a métrica do espaço de Hilbert associado ao produto interno $\mathcal{PT}$ é indefinido. Para sanar este problema de modo a garantir que a probabilidade dentro desta teoria se conserve, é necessária a introdução de um novo operador $\mathcal{C}$ (BENDER; WANG, 2001). Este operador $\mathcal{C}$ é também um observável de modo que $[H, \mathcal{C}] = [\mathcal{PT}, \mathcal{C}] = 0$. Desse modo, os autoestados de H têm valores definidos de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}^2 = 1$.

O operador $\mathcal{C}$ pode ser construído explicitamente em termos dos autoestados de energia do hamiltoniano H . Além disso, a representação de $\mathcal{C}$ no espaço de posição é dado por

$$\mathcal{C}(x, y) = \sum_n \psi_n(x) \psi_n(y) \tag{5.13}$$

Desse modo, a redefinição do produto interno passa a ser

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle_{\mathcal{CPT}} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathcal{CPT} \psi_n(x)] \psi_m(x) dx \tag{5.14}$$

onde

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle_{\mathcal{CPT}} = \delta_{n,m} \tag{5.15}$$

Portando, o produto interno entre os estados passa a ser positivo definido, corrigindo o problema das normas negativas.

5.3 Unitariedade

Na perspectiva de compreender como se dá as normas das funções, é plausível saber a relação de restrição acerca da evolução permitida dos sistemas quânticos $\mathcal{PT}$ -simétricos. É sabido que a equação de Schrodinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (5.16)$$

descreve como o estado quântico de um sistema físico muda com um tempo. Para o caso em que o hamiltoniano H é $\mathcal{PT}$ -simétrico, isto é,

$$H^{\mathcal{PT}} = \mathcal{PT}H(\mathcal{PT})^{-1} = H \quad (5.17)$$

a equação de Schrodinger resulta em

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \mathcal{PT}H(\mathcal{PT})^{-1} |\psi(t)\rangle \quad (5.18)$$

O correspondente dual torna-se

$$-i\hbar \langle \psi(t) | \frac{d}{dt} = \langle \psi(t) | H^{\mathcal{PT}} \quad (5.19)$$

Usando a definição do produto interno já definido, ficamos:

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \right) |\psi(t)\rangle + \langle \psi(t) | \left(\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right) \quad (5.20)$$

Das equações 5.18 e 5.19, tem-se:

$$\langle \psi(t) | \frac{d}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} H^{\mathcal{PT}} \quad (5.21)$$

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} H^{\mathcal{PT}} |\psi(t)\rangle \quad (5.22)$$

Substituindo em 5.20,

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = -\frac{1}{i\hbar} \{ (\langle \psi(t) | H^{\mathcal{PT}}) |\psi(t)\rangle - \langle \psi(t) | (H^{\mathcal{PT}} |\psi(t)\rangle) \} \quad (5.23)$$

$$= -\frac{1}{i\hbar} \{ (\langle \psi(t) | H) |\psi(t)\rangle - \langle \psi(t) | (H |\psi(t)\rangle) \} \quad (5.24)$$

$$= 0 \quad (5.25)$$

Portanto, a norma dos estados é uma constante no tempo, mostrando que a probabilidade é preservada e o sistema com as propriedades $\mathcal{PT}$ -simétricas evolui de maneira unitária.

5.4 Sistemas $\mathcal{PT}$ Simétricos Abertos e Fechados

Tendo em vista que a evolução temporal de um sistema físico pode ser derivado de uma hamiltoniana desse sistema atuando na função de estado, é necessário a classificação desses sistemas abertos, ou não-isolados, e fechados, ou isolados, uma vez que mudanças nas condições iniciais do problema podem restringir tal sistema à uma destas classificações. Sendo assim, um sistema aberto, ou não isolado, é um sistema que está sujeito a influência externas. Desse modo, tais sistemas podem sofrer variações de ganho ou perda de informação devido a um outro sistema. As suas características físicas assemelham-se a sistemas $\mathcal{PT}$ -simétricos *quebrados*, uma vez que há o não equilíbrio. Para o presente trabalho, mesmo o sistema em estudo tendo características de um sistema aberto, é possível trata-lo como fechado mediante a simetria. Desse modo, um sistema fechado, ou isolado, é classificado como aquele que não está em contato com um outro sistema, e assim não sofre influência do meio externo. Na perspectiva da mecânica quântica usual, a evolução temporal desses sistemas se dá por meio de uma hamiltoniana hermitiana. Com isso, tais sistemas são interpretados como ideais, uma vez que sua evolução temporal não sofre influência do meio externo. Estes sistemas assemelham-se com sistemas $\mathcal{PT}$ -simétricos *inteiros*, pois está em um equilíbrio. Se o sistema está em equilíbrio dinâmico, é dito que este sistema está numa fase $\mathcal{PT}$ -simétrica ininterrupta. Se o sistema em questão não estiver em equilíbrio dinâmico, é dito que ele está numa fase $\mathcal{PT}$ -simétrica quebrada, sendo que o ponto que delimita estas duas regiões é chamado de ponto excepcional (PE). Neste ponto, pares de autovalores colidem e tornam-se complexos. Normalmente, a transição de uma fase de simetria $\mathcal{PT}$ inteira (espectro de autovalores reais abaixo do PE) para uma quebra espontânea de simetria $\mathcal{PT}$ (espectro de autovalores complexos acima do PE) pode aparecer quando o parâmetro de acoplamento do sistema no hamiltoniano está adequadamente ajustado (BENDER et al., 2013). Para subsistemas fortemente acoplados, isto é, num regime de forte acoplamento, a hamiltoniana $\mathcal{PT}$ -simétrica reproduz autovalores reais e o sistema se encontra numa fase de simetria $\mathcal{PT}$ inteira. No regime de fraco acoplamento, a hamiltoniana apresenta autovalores complexos e o sistema apresenta quebra espontânea de simetria, tendendo a uma inversão da população.

6 Sistema de Interação Cavity - Campo

O campo das cavidades acopladas é um sistema de dois ou mais modos de cavidade, nos quais a energia flui de uma cavidade para outra. Quando esse sistema é estudado no regime clássico, o efeito do ruído quântico é desprezado e a ocorrência de transição de comportamento de regime clássico para o quântico depende da natureza do campo de interação. Na ausência de campo, a dinâmica do sistema é estudada em (XUE et al., 2017).

6.1 Dinâmica na Ausência do Campo

O modelo que estuda a dinâmica fotônica em três cavidades acopladas consiste na ausência de um campo elétrico é formado por três cavidades acopladas, como mostra a imagem 1.

A hamiltoniana deste sistema é dada por

$$H_I = (\omega - i\gamma) |1\rangle \langle 1| + \omega |2\rangle \langle 2| + (\omega + i\gamma) |3\rangle \langle 3| + \beta (|1\rangle \langle 2| + |2\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 3| + |3\rangle \langle 2|) \quad (6.1)$$

onde ω é a frequência ressonante das cavidades que, para este modelo, está sendo adotado o caso ressonante, em que as três cavidades se encontram na mesma frequência ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$). Além disso, β é a constante de acoplamento entre as cavidades e $\gamma(> 0)$ é a constante que denota a perda e o ganho das cavidades passiva e ativa respectivamente. Além disso, tal hamiltoniana satisfaz a simetria $\mathcal{PT}$, que é $[H_I, \mathcal{PT}] = 0$, pois $\mathcal{P}$ representa o reflexo $1 \leftrightarrow 3$ e $\mathcal{T}$ denota o tempo reverso $i \leftrightarrow -i$.

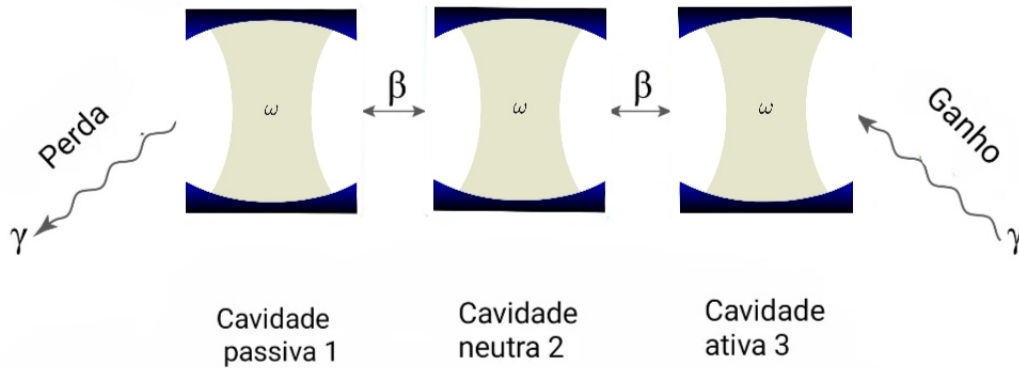


Figura 1 – Sistema de interação entre três cavidades acopladas na ausência do campo elétrico. Figura elaborada pelo autor.

Os autovalores e os seus respectivos autoestados escritos em termos dos operadores de criação e aniquilação desta hamiltoniana são

$$E_0 = \omega, \quad |E_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 + (\gamma/\beta)^2}}(-1, -i\frac{\gamma}{\beta}, 1) \quad (6.2)$$

$$E_{\pm} = \omega \pm \sqrt{2\beta^2 - \gamma^2}, \quad |E_{\pm}\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_{\pm}}(a_{\pm}, b_{\pm}, 1) \quad (6.3)$$

onde $\mathcal{N}_{\pm}$ são as constantes de normalização definidas como

$$a_{\pm} = \frac{\beta^2 - \gamma^2 \mp i\gamma\sqrt{2\beta^2 - \gamma^2}}{\beta^2} \quad (6.4)$$

$$b_{\pm} = \frac{-i\gamma \pm \sqrt{2\beta^2 - \gamma^2}}{\beta} \quad (6.5)$$

Desse modo, percebe-se que os autovalores, como mostram a figura 2

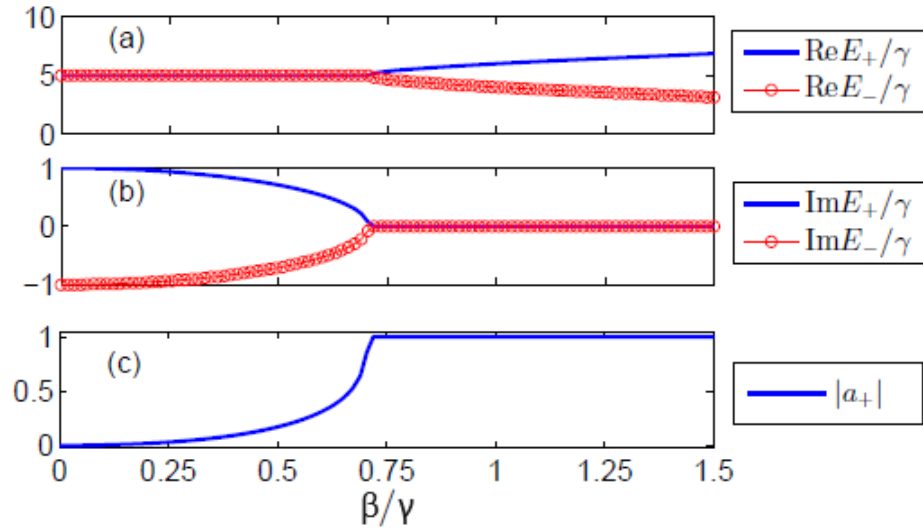


Figura 2 – Parte real de $E_{\pm}$ (a) e parte imaginária de $E_{\pm}$ (b), e $|a_+|$ como função da constante de acoplamento β . Adotando $\omega = 5\gamma$, e todos os parâmetros em unidades de $\gamma = 1$. Figura retirada de (XUE et al., 2017).

serão complexos para $\beta < \gamma/\sqrt{2}$ e serão reais para $\beta > \gamma/\sqrt{2}$. Essa condição delimita as regiões de Simetria $\mathcal{PT}$ Quebrada e de Simetria $\mathcal{PT}$ Inteira, respectivamente. Desse modo, o ponto $\beta = \gamma/\sqrt{2}$ é dito ser um Ponto Excepcional (PE).

A função de onda do sistema assume a seguinte forma

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t) |1\rangle + \phi(t) |2\rangle + \xi(t) |3\rangle \quad (6.6)$$

de modo que, resolvendo a equação de Schrödinger, chega-se ao sistema de equações diferenciais acopladas:

$$i\hbar\dot{\alpha}(t) = (\omega - i\gamma)\alpha(t) + \beta\phi(t) \quad (6.7)$$

$$i\hbar\dot{\phi}(t) = \omega\phi(t) + \beta[\alpha(t) + \xi(t)] \quad (6.8)$$

$$i\hbar\dot{\xi}(t) = (\omega + i\gamma)\xi(t) + \beta\phi(t) \quad (6.9)$$

6.1.1 Dinâmica na Fase $\mathcal{PT}$ -Simétrica Inteira

Considerando que o fóton é inicialmente excitado na cavidade passiva, que é $\alpha(0) = 1$, $\phi(0) = \xi(0) = 0$, a dinâmica do sistema é governado pelas soluções

$$\alpha(t) = \frac{2\beta^2 e^{-i\omega t}}{\Delta^2} \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right), \quad (6.10)$$

$$\phi(t) = \frac{2i\beta^2 e^{-i\omega t}}{\Delta^2} \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta t - \zeta_2}{2}\right), \quad (6.11)$$

$$\xi(t) = -\frac{2\beta^2 e^{-i\omega t}}{\Delta^2} \sin^2\left(\frac{\Delta t - \zeta_1}{2}\right) \quad (6.12)$$

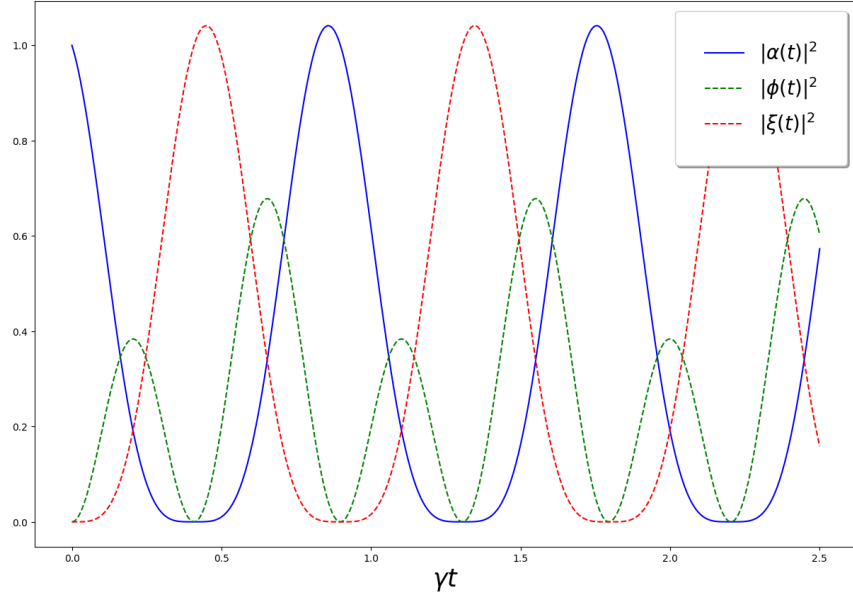
onde $\Delta = \sqrt{2\beta^2 - \gamma^2}$, $\zeta_1 = \arctan[\Delta\gamma/(\beta^2 - \gamma^2)]$ e $\zeta_2 = 2\arctan(\Delta/\gamma)$. Segundamente, considerando que o fóton é inicialmente excitado na cavidade ativa, que é $\alpha(0) = \phi(0) = 0$, $\xi(0) = 1$, a dinâmica do sistema passa a ser governada pelas soluções

$$\alpha'(t) = \frac{2\beta^2 e^{-i\omega t}}{\Delta^2} \cos^2\left(\frac{\Delta t + \zeta_1}{2}\right), \quad (6.13)$$

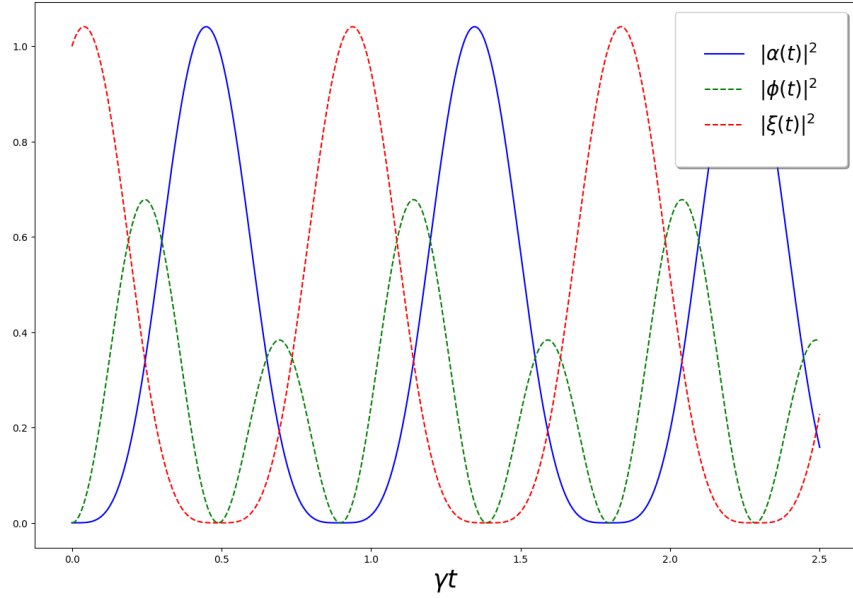
$$\phi'(t) = \frac{2i\beta^2 e^{-i\omega t}}{\Delta^2} \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta t + \zeta_2}{2}\right), \quad (6.14)$$

$$\xi'(t) = -\frac{2\beta^2 e^{-i\omega t}}{\Delta^2} \cos^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \quad (6.15)$$

Plotando o módulo ao quadrado dessas soluções em função do tempo, como mostram as figuras 3(a) e 3(b),



(a)



(b)

Figura 3 – Dinâmica do sistema na fase $\mathcal{PT}$ -simétrica inteira. Os parâmetros são $\beta = 5\gamma$, $\omega = 5\gamma$ e $\gamma = 1$. As condições iniciais são 3(a) $\alpha(0) = 1, \phi(0) = \xi(0) = 0$; 3(b) $\alpha(0) = \phi(0) = 0, \xi(0) = 1$

percebe-se que, quando o sistema está na fase de simetria $\mathcal{PT}$, a dinâmica mostra oscilações periódicas regulares. Quando o fóton é inicialmente excitado na cavidade passiva, $\alpha(0) = 1$, o decaimento faz com que $|\alpha(t)|^2$ diminua diretamente a zero e então o crescimento ocorre. Entretanto, se a excitação ocorrer na cavidade ativa, $\xi(0) = 1$, com o auxílio do efeito de ganho, $|\xi(t)|^2$ atinge seu valor máximo, que obviamente é maior que 1, e depois oscila en-

tre seu valor máximo e zero. Quanto a cavidade central, pode-se observar que $\phi(t) \neq \phi'(t)$. Neste caso, é dito que o sistema apresenta um comportamento assimétrico de transmissão de fótons mesmo na fase de simetria $\mathcal{PT}$.

6.1.2 Dinâmica na Fase $\mathcal{PT}$ -Simétrica Quebrada

Na fase $\mathcal{PT}$ -simétrica quebrada, onde $\beta < \gamma/\sqrt{2}$, a dinâmica do sistema é governada pela solução, considerando que o fóton é inicialmente excitado na cavidade passiva, $\alpha(0) = 1$, dada por

$$\alpha_b(t) = \frac{e^{-i\omega t}}{\delta^2} [\beta^2 + (\beta^2 - \gamma^2) \cosh(\delta t) + \gamma\delta \sinh(\delta t)] \quad (6.16)$$

$$\phi_b(t) = -\frac{i\beta e^{-i\omega t}}{\delta^2} [\gamma \cosh(\delta t) - \gamma - \delta \sinh(\delta t)] \quad (6.17)$$

$$\xi_b(t) = -\frac{2\beta^2 e^{-i\omega t} \sinh^2(\frac{\delta t}{2})}{\delta^2} \quad (6.18)$$

onde $\delta = \sqrt{\gamma^2 - 2\beta^2}$. Por outro lado, se o fóton é inicialmente excitado na cavidade ativa, $\xi(0) = 1$, a dinâmica do sistema é descrita por

$$\alpha'_b(t) = -\frac{2\beta^2 e^{-i\omega t} \sinh^2(\frac{\delta t}{2})}{\delta^2} \quad (6.19)$$

$$\phi'_b(t) = -\frac{i\beta e^{-i\omega t}}{\delta^2} [\gamma \cosh(\delta t) - \gamma + \delta \sinh(\delta t)] \quad (6.20)$$

$$\xi'_b(t) = -\frac{e^{-i\omega t}}{\delta^2} [\beta^2 + (\beta^2 - \gamma^2) \cosh(\delta t) - \gamma\delta \sinh(\delta t)] \quad (6.21)$$

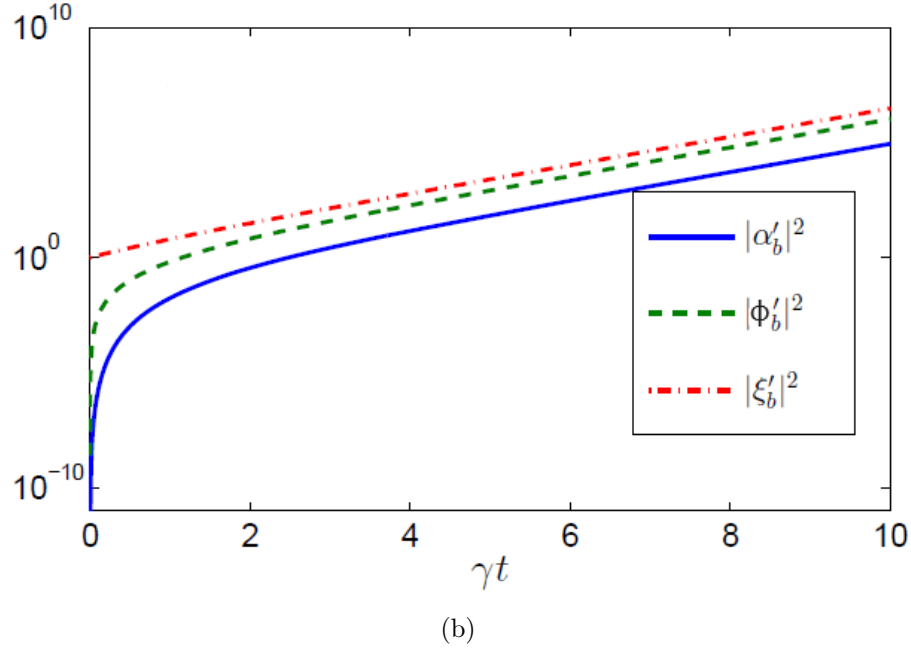
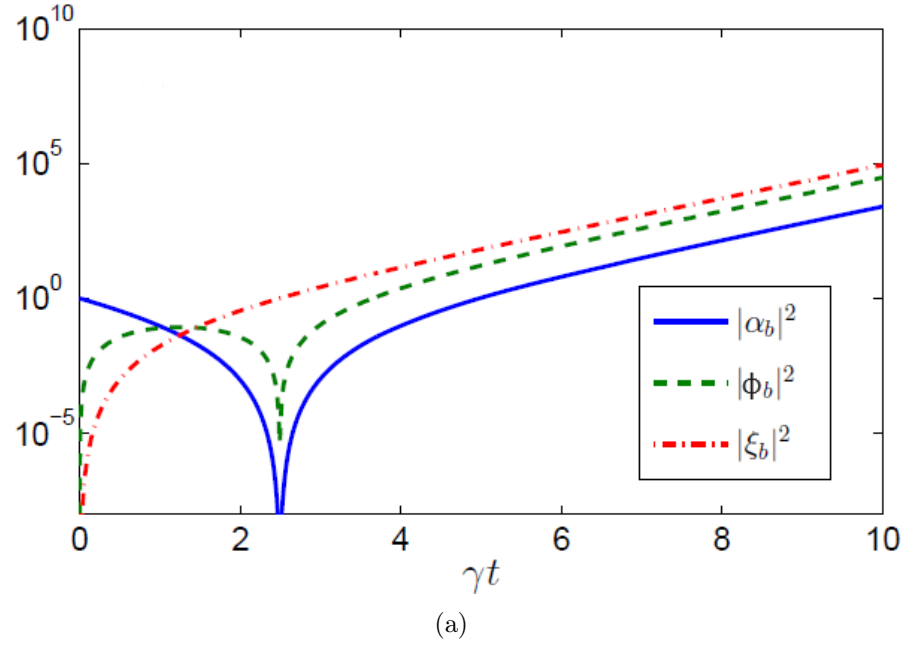


Figura 4 – Dinâmica do sistema na fase $\mathcal{PT}$ -simétrica quebra. Os parâmetros são $\beta = 0.5\gamma$, $\omega = 5\gamma$ e $\gamma = 1$. As condições iniciais são 4(a) $\alpha(0) = 1, \phi(0) = \xi(0) = 0$; 4(b) $\alpha(0) = \phi(0) = 0, \xi(0) = 1$. Figura retirada de (XUE et al., 2017)

Na figuras 4(a) e 4(b) estão sendo representadas as dinâmicas do sistema quando ele está na fase de quebra de simetria $\mathcal{PT}$. Neste caso, a dinâmica deixa de assumir seu comportamento periódico. Na figura 4(a), quando o fóton é inicialmente excitado na cavidade passiva, ele sofrerá uma perda e depois o ganho na cavidade ativa compensará esta perda. Desse modo, as amplitudes de probabilidade de encontrar o fóton nas cavidades aumentará com o passar

tempo. Na figura 4(b), onde o fóton é excitado na cavidade ativa, o efeito de ganho entrará em ação desde o início e as amplitudes de probabilidade de encontrar o fóton em todas as cavidades aumentará com o tempo. Em relação a cavidade neutra, o fóton incidente saltará para ela, mas os fótons obtidos saltarão para as outras duas cavidades devido ao acoplamento coerente até que o fóton ganho da cavidade ativa salte de volta para ela. Por outro lado, a probabilidade de encontrar um fóton na cavidade ativa aumentará monotonamente devido ao efeito combinacional do salto fotônico da cavidade central e do ganho do ambiente circundante.

6.2 Dinâmica de Interação Cavidade - Campo Elétrico

A teoria semiclássica trata-se da interação entre cavidades quânticas e o campo óptico clássico. Para o modelo estudado, é considerada a teoria semi-clássica de interação, onde as propriedades das cavidades e o ruído quântico são desconsiderados. Desse modo, considera-se um campo eletromagnético clássico linearmente polarizado em interação com três cavidades ópticas acopladas da figura 1.

A hamiltoniana que descreve as cavidades acopladas é dada por

$$H_l = (\omega - i\gamma) |1\rangle \langle 1| + \omega |2\rangle \langle 2| + (\omega + i\gamma) |3\rangle \langle 3| + \beta (|1\rangle \langle 2| + |2\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 3| + |3\rangle \langle 2|) \quad (6.22)$$

A hamiltoniana do campo eletromagnético é escrito como

$$H_c = - (p_{12} |1\rangle \langle 2| + p_{21} |2\rangle \langle 1| + p_{23} |2\rangle \langle 3| + p_{32} |3\rangle \langle 2|) E_0 \cos(\nu t) \quad (6.23)$$

onde foi considerado a aproximação de dipolo $E_r(\hat{R}, t) \approx E_r(t) \approx E_0 \cos(\nu t)$ e $\hat{H}_c$ se torna

$$\hat{H}_c = qE_0 \cos(\nu t) \hat{R} \quad (6.24)$$

de modo que

$$H_{12} = \langle 1 | \hat{H}_c | 2 \rangle = -p_{12} E_0 \cos(\nu t) \quad (6.25)$$

$$H_{21} = \langle 2 | \hat{H}_c | 1 \rangle = -p_{21} E_0 \cos(\nu t) \quad (6.26)$$

$$H_{23} = \langle 2 | \hat{H}_c | 3 \rangle = -p_{23} E_0 \cos(\nu t) \quad (6.27)$$

$$H_{32} = \langle 3 | \hat{H}_c | 2 \rangle = -p_{32} E_0 \cos(\nu t) \quad (6.28)$$

com $p_{ij} = p_{ji}^*$ são os elementos de dipolo elétrico referentes as cavidades e ν a frequência de oscilação do campo.

Portanto, a hamiltoniana total do sistema é dada pela soma destas hamiltoniana,

$$H_{total} = H_l + H_c \quad (6.29)$$

A presença do campo não altera o PE, sendo mantido em $\beta = \gamma/\sqrt{2}$.

Fazendo a preparação do estado e considerando a função de onda do sistema como

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t) |1\rangle + \phi(t) |2\rangle + \xi(t) |3\rangle \quad (6.30)$$

onde $\alpha(t)$, $\phi(t)$ e $\xi(t)$ são as amplitudes de probabilidade. Desse modo, substituindo o estado preparado, juntamente com a hamiltoniana total do sistema na equação de Schrodinger dependente do tempo,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H_{total} |\psi(t)\rangle \quad (6.31)$$

obtem-se um sistema de equações diferenciais acopladas, dadas por:

$$i\hbar \dot{\alpha}(t) = (\omega - i\gamma)\alpha(t) + \beta\phi(t) - p_{12}E_0 \cos(\nu t) \quad (6.32)$$

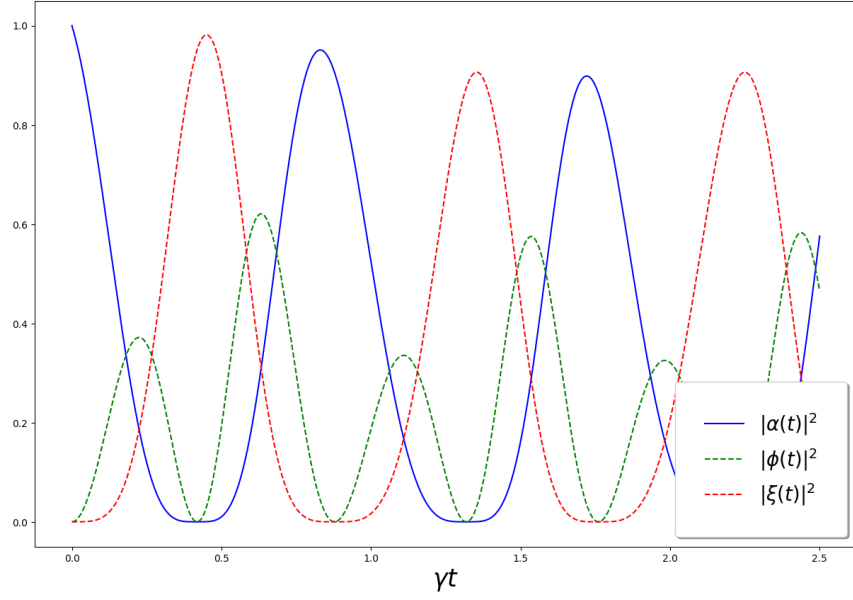
$$i\hbar \dot{\phi}(t) = \omega\phi(t) + \beta[\alpha(t) + \xi(t)] - E_0 p_{12} \cos(\nu t) [p_{21}\alpha(t) + p_{23}\xi(t)] \quad (6.33)$$

$$i\hbar \dot{\xi}(t) = (\omega + i\gamma)\xi(t) + \beta\phi(t) - p_{32}E_0 \cos(\nu t)\phi(t) \quad (6.34)$$

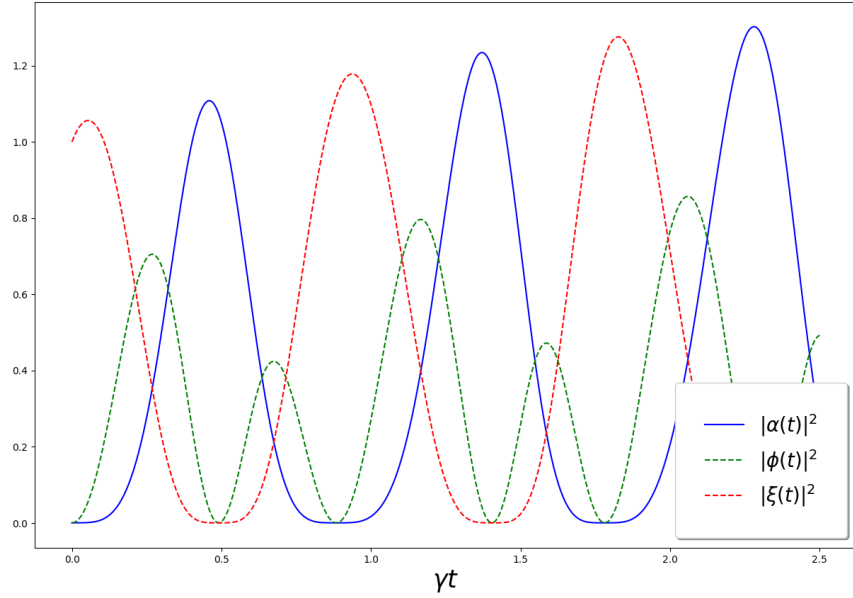
Esse sistema de equações diferenciais foi resolvido numericamente utilizando o método de Runge Kutta de 4ª ordem, por meio da linguagem Python, como mostra o algoritmo no apêndice A .

6.2.1 Dinâmica na Fase $\mathcal{PT}$ - Simétrica Inteira

Estudando a dinâmica do sistema na fase $\mathcal{PT}$ -simétrica, onde $\beta > \gamma/\sqrt{2}$, e considerando que o fóton é inicialmente excitado na cavidade passiva 5(a), que é $\alpha(0) = 1$ e $\phi(0) = \xi(0) = 0$, e posteriormente na cavidade ativa 5(b), $\alpha(0) = \phi(0) = 0$ e $\xi(0) = 1$, as amplitudes de probabilidade de encontrar o fóton nas três cavidades são



(a)



(b)

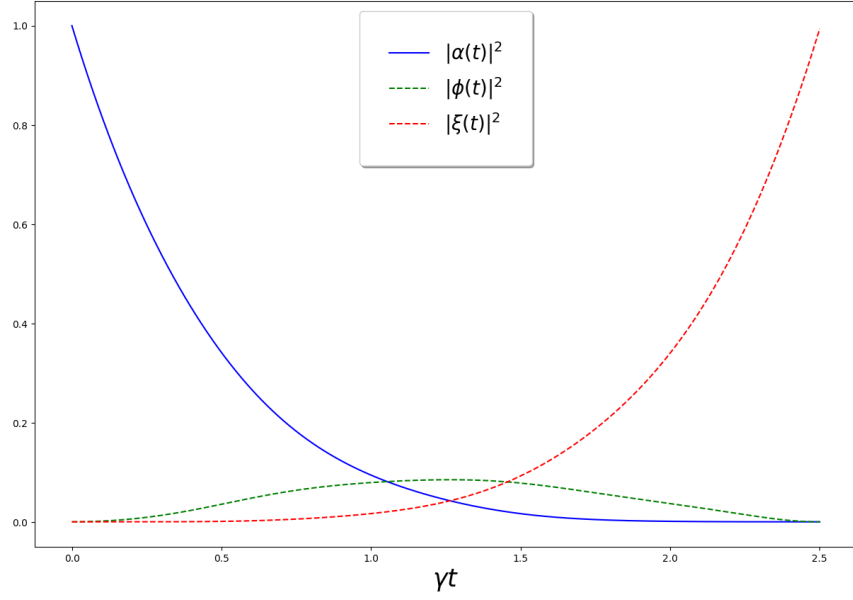
Figura 5 – Dinâmica do sistema na fase $\mathcal{PT}$ -simétrica. Os parâmetros são $\beta = 5\gamma$, $\omega = 5\gamma$, $\nu = 2\pi$ e $\gamma = 1$. As condições iniciais são 5(a) $\alpha(0) = 1, \phi(0) = \xi(0) = 0$; 5(b) $\alpha(0) = \phi(0) = 0, \xi(0) = 1$

Na figura 5(a), onde o fóton é inicialmente excitado na cavidade passiva, mostra que, quando o sistema é estudado na fase de simetria $\mathcal{PT}$, as amplitudes de probabilidade de ocupação são periódicas, de modo que tais amplitudes decaem com o tempo. Desse modo, $|\alpha(t)|^2$ parte de seu valor máximo, tende a zero e, em um determinado instante de tempo, assume o mesmo valor da cavidade neutra, enquanto a cavidade ativa assume seu valor máximo.

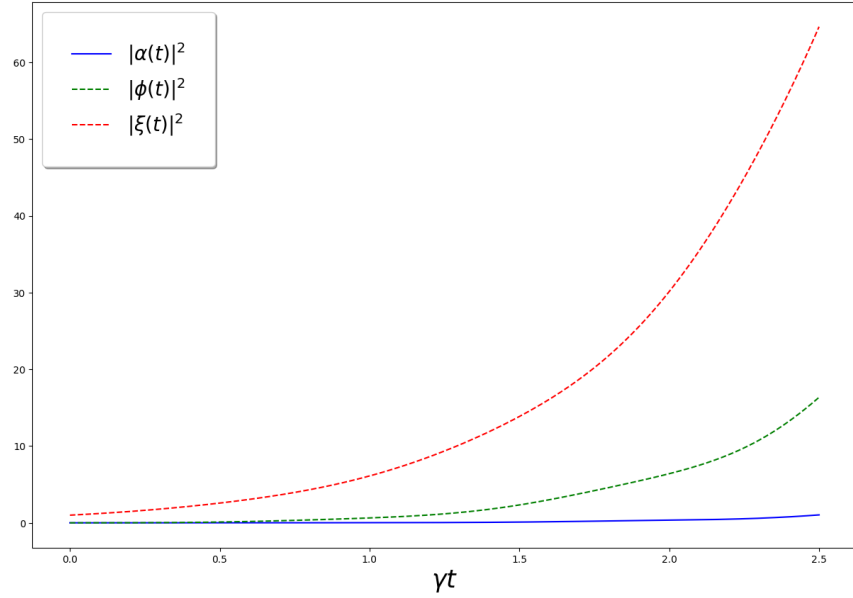
Logo em seguida, ocorre o crescimento. O CE, juntamente com o fator de perda da cavidade passiva é o responsável por este decaimento das amplitudes em função do tempo, pois o efeito do CE aumentará o fluxo de energia dentro das cavidades e se juntará com o efeito de perda, fazendo com que a probabilidade de ocupação diminua no certo intervalo de tempo. Nesse caso, o acoplamento coerente entre as cavidades não faz com que o efeito de ganho compense o efeito de perda. Quando a excitação ocorre na cavidade ativa, $\xi(0) = 1$, $|\xi(t)|^2$ atingirá um valor que é maior que 1, sofrerá um decaimento e o resnascimento antigirá seu valor que é maior que o valor anterior e esse crescimento irá se perdurar em um certo intervalo de tempo. Neste caso, o efeito do CE na cavidade de ganho sobressai ao efeito de perda da cavidade passiva, fazendo com que a cavidade ativa têm acúmulos ópticos, resultando no crescimento das amplitudes de probabilidades. Devido a este acúmulo, o sistema tende a uma inversão da população, onde há estados com maiores níveis de energia com relação ao estado fundamental.

6.2.2 Dinâmica na Fase $\mathcal{PT}$ -Simétrica Quebrada

Quando o sistema é estudado na fase de quebra de simetria $\mathcal{PT}$, onde $\beta < \gamma/\sqrt{2}$ e os autovalores passam a serem complexos, e considerando que o fóton é inicialmente excitado na cavidade passiva, $\alpha(0) = 1$ e $\phi(0) = \xi(0) = 0$ 6(a), e posteriormente da cavidade ativa $\alpha(0) = 0 = \phi(0) = 0$ e $\xi(0) = 1$ 6(b), a dinâmica do sistema



(a)



(b)

Figura 6 – Dinâmica do sistema na fase $\mathcal{PT}$ -simétrica quebrada. Os parâmetros são $\beta = 0.5\gamma$, $\omega = 5\gamma$, $\nu = 2\pi$ e $\gamma = 1$. As condições iniciais são 6(a) $\alpha(0) = 1, \phi(0) = \xi(0) = 0$; 6(b) $\alpha(0) = \phi(0) = 0, \xi(0) = 1$

deixa de assumir o comportamento periódico e é levado a uma inversão da população. Quando o fóton é excitado na cavidade passiva, $\alpha(0) = 1$, a amplitude de probabilidade, diferentemente do sistema na ausência do CE, parte de seu valor máximo e decai à zero, pois o campo, juntamente com o efeito de perda da cavidade induz uma maior perda de acúmulos ópticos que não é compensado pelo efeito de ganho da cavidade ativa. Com relação a cavidade

ativa, ela parte do seu valor mínimo, que neste caso é zero, e cresce tendendo ao seu valor máximo. Isto é, o fóton incidente saltará da cavidade passiva, assume uma probabilidade de ocupação na cavidade central e, em seguida, os fótons obtidos, juntamente com o fóton incidente, saltarão para a cavidade com efeito de ganho. Como o CE está impulsionando o fóton incidente, o acoplamento com os fótons subsequentes é dificultado.

Na figura 6(b), quando o fóton é excitado na cavidade de ganho, $\xi(0) = 1$, o efeito de ganho e a atuação do CE entrará em ação desde início e as amplitudes de probabilidade crescerão com a evolução do tempo. Percebe-se que este crescimento é menos acentuado na cavidade passiva. Isso ocorre devido ao seu efeito de perda e o crescimento ser maior na cavidade neutra se dá pelo seu acoplamento coerente com a cavidade de ganho.

Fazendo a comparação entre os resultados nas figuras 6(a) e 6(b), também é observado a transmissão fotônica assimétrica na quebra de fase de simetria $\mathcal{PT}$, mesmo na presença do CE.

7 Conclusão

No presente trabalho, foi apresentado a aplicação de um campo elétrico semi-clássico interagindo com o sistema trímico óptico de cavidades passivas e ativas e uma terceira sem ganho e sem perda. As propriedades físicas das cavidades não foram postas aqui, mas é possível, de maneira experimental, realizar a cavidade ativa dopando íons dentro do material da cavidade (PENG et al., 2014). Esse estudo das propriedades das cavidades ainda é um cenário amplo e aberto, sendo útil para a óptica $\mathcal{PT}$ -simétrica.

Estudamos a transição de fase $\mathcal{PT}$ -simétrica, demonstrando a quebra espontânea de simetria no trímico óptico com ganho e perda balanceados sujeito a interação do campo. Na fase de simetria $\mathcal{PT}$, os autovalores são reais e a dinâmica do sistema oscila de modo crescente ou decrescente, dependendo em que cavidade o fóton é inicialmente excitado e para uma frequência correta do campo. Para o caso crescente, o CE se combina com o efeito de ganho da cavidade onde tal efeito amplifica o CE que passa por ela, e o efeito de perda da cavidade passiva não consegue compensar, levando a um crescimento nas amplitudes de probabilidade. No caso decrescente, a cavidade passiva é bombeada pelo CE e essa perda se torna mais efetiva, de modo que a perda projeta uma redução na intensidade do CE sugerindo uma diminuição acerca das probabilidades de ocupação e, conseqüentemente, nos níveis de energia, que não é compensada pelo o efeito de ganho. Na quebra de fase $\mathcal{PT}$, a parte imaginária dos autovalores surgem e a dinâmica temporal do sistema deixa de ser oscilatória e é caracterizada por uma forte localização do CE na cavidade ativa e o sistema é levado a uma inversão da população, onde há estados com maiores níveis de enrgia com relação ao estado funamental. Esta forte localização sugere a um crescimento no tempo das amplitudes da função de estado, como é mostrado nas figuras 6(a) e 6(b). Portanto, os resultados obtidos podem ser úteis para a continuação de possíveis estudos acerca de cavidades ópticas sujeitas a interação de um CE.

Referências

- AGARWAL, G.; QU, K. Spontaneous generation of photons in transmission of quantum fields in p t-symmetric optical systems. *Physical Review A*, APS, v. 85, n. 3, p. 031802, 2012.
- BENDER, C. M. Making sense of non-hermitian hamiltonians. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 70, n. 6, p. 947, 2007.
- BENDER, C. M.; BOETTCHER, S. Real spectra in non-hermitian hamiltonians having p t symmetry. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 24, p. 5243, 1998.
- BENDER, C. M.; BRODY, D. C.; JONES, H. F. Must a hamiltonian be hermitian? *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 71, n. 11, p. 1095–1102, 2003.
- BENDER, C. M. et al. Twofold transition in pt-symmetric coupled oscillators. *Physical Review A*, APS, v. 88, n. 6, p. 062111, 2013.
- BENDER, C. M.; WANG, Q. Comment on a recent paper by mezincescu. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 34, n. 15, p. 3325, 2001.
- BENDER, N. et al. Observation of asymmetric transport in structures with active nonlinearities. *Physical review letters*, APS, v. 110, n. 23, p. 234101, 2013.
- BITTNER, S. et al. P t symmetry and spontaneous symmetry breaking in a microwave billiard. *Physical review letters*, APS, v. 108, n. 2, p. 024101, 2012.
- CHONG, Y.; GE, L.; STONE, A. D. P t-symmetry breaking and laser-absorber modes in optical scattering systems. *Physical Review Letters*, APS, v. 106, n. 9, p. 093902, 2011.
- CHTCHELKATCHEV, N. et al. Stimulation of the fluctuation superconductivity by p t symmetry. *Physical review letters*, APS, v. 109, n. 15, p. 150405, 2012.
- COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. Quantum mechanics, volume 1. *Quantum Mechanics*, v. 1, p. 898, 1986.
- HANG, C.; HUANG, G.; KONOTOP, V. V. P t symmetry with a system of three-level atoms. *Physical review letters*, APS, v. 110, n. 8, p. 083604, 2013.
- JAYNES, E. T.; CUMMINGS, F. W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 51, n. 1, p. 89–109, 1963.
- KOCHAROVSKAYA, O.; ROSTOVTSEV, Y. V.; IMAMOGLU, A. Inversionless amplification in the three-level atoms with and without a hidden inversion in reservoir. *Physical Review A*, APS, v. 58, n. 1, p. 649, 1998.
- KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. v. 17.

- LAMBROPOULOS, P. *Fundamentals of quantum optics and quantum information*. [S.l.]: Springer, 2007.
- LI, J. et al. Proposal for enhanced photon blockade in parity-time-symmetric coupled microcavities. *Physical Review A*, APS, v. 92, n. 5, p. 053837, 2015.
- NOETHER, E. Invariante variationsprobleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse*, v. 1918, p. 235–257, 1918.
- PENG, B. et al. Parity–time-symmetric whispering-gallery microcavities. *Nature Physics*, Nature Publishing Group UK London, v. 10, n. 5, p. 394–398, 2014.
- SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. et al. *Modern quantum mechanics, vol. 185*. [S.l.]: Pearson Harlow, 2014.
- SUN, H. et al. Amplification without population inversion in a three-level λ -type system with an external coherent magnetic field. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 335, n. 1, p. 76–82, 2005.
- TAVIS, M.; CUMMINGS, F. W. Exact solution for an n-molecule—radiation-field hamiltonian. *Physical Review*, APS, v. 170, n. 2, p. 379, 1968.
- ULBRICHT, T. Asymmetry: the non-conservation of parity and optical activity. *Quarterly Reviews, Chemical Society*, Royal Society of Chemistry, v. 13, n. 1, p. 48–60, 1959.
- XUE, L. et al. symmetric phase transition and photonic transmission in an optical trimer system. *Optics Express*, Optica Publishing Group, v. 25, n. 15, p. 17249–17257, 2017.
- ZHENG, C.; HAO, L.; LONG, G. L. Observation of a fast evolution in a parity-time-symmetric system. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society Publishing, v. 371, n. 1989, p. 20120053, 2013.
- ZYABLOVSKY, A. A. et al. Pt-symmetry in optics. *Physics-Uspekhi*, IOP Publishing, v. 57, n. 11, p. 1063, 2014.

A APÊNDICE - Algoritmo em Python

```
1
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import pylab
5 pylab.rcParams['figure.figsize'] = (15.0, 10.0)
6
7
8 def f_alpha(t, alpha, phi, zeta):
9     return (alpha*(omega - 1j*gamma) + beta*phi - Pab*E0*np.cos(nu*t)*phi)
10    /(1j*hbar)
11
12 def f_phi(t, alpha, phi, zeta):
13     return (omega*phi + beta*(alpha + zeta) - E0*np.cos(nu*t)*(Pba*alpha +
14    Pbc*zeta))/(1j*hbar)
15
16 def f_zeta(t, alpha, phi, zeta):
17     return (zeta*(omega + 1j*gamma) + beta*phi - Pcb*E0*np.cos(nu*t)*phi)
18    /(1j*hbar)
19
20 #condicoes iniciais
21
22 alpha0 =1
23 phi0 = 0
24 zeta0 = 0
25
26 #parametros do sistema
27 omega = 5
28 gamma = 1
29 beta = 5
30 Pab = 0.1
31 Pba = 0.1
32 Pbc = 0.1
33 Pcb = 0.1
34 E0 = 5
35 nu = 2*np.pi
36 h = 0.001
37 tf =2.5
38 hbar=1
39
40 solucao = [[alpha0, phi0, zeta0]]
```

```

38
39
40 for tn in np.arange(0, tf, h):
41     alpha, phi, zeta = solucao[-1]
42     k1_alpha = h * f_alpha(tn, alpha, phi, zeta)
43     k1_phi = h * f_phi(tn, alpha, phi, zeta)
44     k1_zeta = h * f_zeta(tn, alpha, phi, zeta)
45     k2_alpha = h * f_alpha(tn + h/2, alpha + k1_alpha/2, phi + k1_phi/2,
46     zeta + k1_zeta/2)
47     k2_phi = h * f_phi(tn + h/2, alpha + k1_alpha/2, phi + k1_phi/2, zeta
48     + k1_zeta/2)
49     k2_zeta = h * f_zeta(tn + h/2, alpha + k1_alpha/2, phi + k1_phi/2,
50     zeta + k1_zeta/2)
51     k3_alpha = h * f_alpha(tn + h/2, alpha + k2_alpha/2, phi + k2_phi/2,
52     zeta + k2_zeta/2)
53     k3_phi = h * f_phi(tn + h/2, alpha + k2_alpha/2, phi + k2_phi/2, zeta
54     + k2_zeta/2)
55     k3_zeta = h * f_zeta(tn + h/2, alpha + k2_alpha/2, phi + k2_phi/2,
56     zeta + k2_zeta/2)
57     k4_alpha = h * f_alpha(tn + h, alpha + k3_alpha, phi + k3_phi, zeta +
58     k3_zeta)
59     k4_phi = h * f_phi(tn + h, alpha + k3_alpha, phi + k3_phi, zeta +
60     k3_zeta)
61     k4_zeta = h * f_zeta(tn + h, alpha + k3_alpha, phi + k3_phi, zeta +
62     k3_zeta)
63     alpha_novo = alpha + (k1_alpha + 2*k2_alpha + 2*k3_alpha + k4_alpha)/6
64     phi_novo = phi + (k1_phi + 2*k2_phi + 2*k3_phi + k4_phi)/6
65     zeta_novo = zeta + (k1_zeta + 2*k2_zeta + 2*k3_zeta + k4_zeta)/6
66     solucao.append([alpha_novo, phi_novo, zeta_novo])
67
68
69
70
71 tempo = np.arange(0, tf+h, h)
72 alphaM= [abs(solucao[i][0])**2 for i in range(len(solucao))]
73 phiM = [abs(solucao[i][1])**2 for i in range(len(solucao))]
74 zetaM = [abs(solucao[i][2])**2 for i in range(len(solucao))]
75
76
77 alpha= [solucao[i][0] for i in range(len(solucao))]
78 phi= [solucao[i][1] for i in range(len(solucao))]
79 zeta = [solucao[i][2] for i in range(len(solucao))]
80
81
82 plt.plot(tempo, alphaM, color='blue',label="$|\\alpha(t)|^2$")
83 plt.plot(tempo, phiM, '--', color='green',label="$|\\phi(t)|^2$")

```

```

73 plt.plot(tempo, zetaM, '--', color='red', label="$|\\xi(t)|^2$")
74 plt.xlabel("$\\gamma$ t$", fontsize=18)
75 plt.legend(fontsize=18, borderpad=2, shadow=True, loc='upper right')
76 plt.show()

```

Listing A.1 – Algoritmo em Python para a solução do problema.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA

CCET - Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias - Campus Reitor Edgard Santos
Avaliação de Monografia de Conclusão de Curso – 08/05/2017

Aos vinte e dois dias do mês de março de dois mil e vinte e quatro, às quatorze horas e quinze minutos, teve início a defesa pública de Monografia de Conclusão de Curso do discente Cezar Rodrigues de Souza intitulada: *Dinâmica de interação em sistema trimero óptico com simetria PT*, tendo como banca examinadora o Prof. Dr Elias Brito Alves Junior (Orientador), CCET- UFOB, Prof. Dr. Clebson dos Santos Cruz CCET – UFOB e o Prof. Dr. Antonio César do Prado Rosa Junior CCET – UFOB. A atividade é critério para integralização curricular e obtenção do título de Bacharel em Física pela Universidade Federal do Oeste da Bahia – UFOB. Ao término da apresentação abriu-se seção de arguição pela banca estendendo-se aos demais presentes. Em seguida a banca examinadora reuniu-se em caráter privado para avaliação e emissão de parecer. Dando continuidade ao processo, o presidente da banca leu o parecer em público, onde a banca declara a aprovação do trabalho, ressaltando o modo satisfatório da apresentação, e atribui nota 8,5 à atividade curricular CET0318-Trabalho de Conclusão de Curso III (Física). Não havendo mais nada a tratar, a reunião foi encerrada às 15 horas e trinta e nove minutos. Eu, Elias Brito Alves Junior, lavrei a presente ata, que depois de lida e aprovada, será assinada pelos presentes. Barreiras, 22 de março de dois mil e vinte e quatro.