



UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DAS TECNOLOGIAS  
CURSO DE BACHARELADO EM FÍSICA

Igor Ricardo Filgueira e Silva

# **Estudo da Amplitude de Correlação do Oscilador Harmônico Simples na Teoria Quântica do Movimento**

Barreiras, Bahia  
12 de dezembro de 2022

Igor Ricardo Filgueira e Silva

# **Estudo da Amplitude de Correlação do Oscilador Harmônico Simples na Teoria Quântica do Movimento**

Monografia apresentado ao curso de bacharelado em Física, como requisito para a aprovação na componente curricular CET0318-Trabalho de Conclusão de Curso III e obtenção do título de bacharel em Física, pelo Centro de Ciências Exatas e das Tecnologias da Universidade Federal do Oeste da Bahia

Universidade Federal do Oeste da Bahia  
Centro de Ciências Exatas e das Tecnologias  
Curso de Bacharelado em Física

Orientador: Dr. Elias Brito Alves Júnior

Barreiras, Bahia  
12 de dezembro de 2022

## FICHA CATALOGRÁFICA

---

S586 Silva, Igor Ricardo Filgueira e.

Estudo da amplitude de correlação do oscilador harmônico simples na teoria quântica do movimento. / Igor Ricardo Filgueira e Silva. – 2022.

39 f.

Orientador: Prof. Dr. Elias Brito Alves Junior.

Monografia (Graduação) – Bacharelado em Física. Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias. Barreiras, BA, 2022.

1. Teoria quântica do movimento. 2. David Bohm. 3. Louis de Broglie. 4. Onda-piloto. I. Elias Brito Alves Junior. II. Universidade Federal do Oeste da Bahia - Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias. III. Título.

CDD 215.3

---

**Biblioteca Universitária de Barreiras - UFOB**

Igor Ricardo Filgueira e Silva

## **Estudo da Amplitude de Correlação do Oscilador Harmônico Simples na Teoria Quântica do Movimento**

Monografia apresentado ao curso de bacharelado em Física, como requisito para a aprovação na componente curricular CET0318-Trabalho de Conclusão de Curso III e obtenção do título de bacharel em Física, pelo Centro de Ciências Exatas e das Tecnologias da Universidade Federal do Oeste da Bahia

Trabalho aprovado. Barreiras, Bahia, 12 de dezembro de 2022:

---

**Dr. Elias Brito Alves Júnior**  
Orientador

---

**Dr. Antônio Cesar do Prado Rosa Jr.**  
Convidado 1

---

**Dr. Clebson dos Santos Cruz**  
Convidado 2

Barreiras, Bahia  
12 de dezembro de 2022

*Dedicado à minha mãe e meu pai*

# Agradecimentos

Tenho que começar agradecendo meus pais, Josias e Sandra, eles que me criaram do jeito que sou hoje, seguraram a barra com os vários problemas que surgiram nos últimos anos e, também, me deram a oportunidade de me graduar em física bracharelado sem que eu precisasse trabalhar, espero um dia retribuir a altura o que me deram, por esses motivos, e tantos outros, que este trabalho é dedicado à eles.

Agradeço à minha família por todo apoio que merda, meus sobrinhos Paulo e Davi, minha irmã Patrícia, meus vários primos, tias e tios, também à minha vó Losa e aos meus avós que já não estão mais aqui: Vidalino, Ivan e Ana.

Também agradeço pelos amigos que tenho. Todos aqueles que surgiram pela vida e aos que a UFOB me deu, em especial: Teonas, Ada, Matheus, Gleydson, Daniel, Carlene, Bruna, Giovanna e Vinícius. Vocês me ajudaram em diversas ocasiões, também vivi e quero viver vários outros momentos com vocês e me desculpa pelas vezes que incomodei com aborrecimentos que hoje já nem lembro quais foram.

Sou grato a UFOB também, por todos os professores que estiveram comigo nessa jornada. Certamente lembrarei dos vários ensinamentos, orientações, conversas, críticas e outros momentos com todos os professores da física e matemática.

Enfim, obrigado!

*"Eu posso não ter ido para onde eu pretendia ir,  
mas eu acho que acabei terminando onde eu pretendia estar"*  
*(Douglas Adams - Praticamente Inofensiva)*

# Resumo

A Teoria Quântica do Movimento é a interpretação da Mecânica Quântica criada por Louis De Broglie e David Bohm. Nela, o determinismo volta a ser objeto de estudo e a probabilidade não é mais uma característica fundamental da teoria quântica como um todo. Ainda na década de 1920, De Broglie apresentou a ideia da onda-piloto em que o movimento de uma partícula no mundo microscópico é orientado por uma onda-guia que a própria partícula gera. Alvo de muitas críticas, essa ideia foi abandonada por anos até que, em 1952, Bohm publicou dois artigos com uma descrição matemática de variáveis ocultas que possuía os mesmos resultados da Mecânica Quântica usual, descrevendo também a existência do Potencial Quântico que não possui análogo clássico, mas que explicaria a onda-piloto de De Broglie. Além disso, esses artigos possuem quatro postulados que são a base teórica da Teoria Quântica do Movimento. Esta monografia irá abordar a construção matemática dessa teoria, além de trabalhar com o problema da dinâmica de um Oscilador Harmônico Simples, explicando, também, as implicações do resultado do quadrado da Amplitude de Correlação para esse tipo de problema.

**Palavras-chave:** teoria quântica do movimento. tqm. david bohm. louis de broglie. onda-piloto. onda guia. potencial quântico. oscilador harmônico simples. mecânica quântica.

# Sumário

|     |                                                                   |    |
|-----|-------------------------------------------------------------------|----|
| 1   | INTRODUÇÃO . . . . .                                              | 8  |
| 2   | OBJETIVOS . . . . .                                               | 10 |
| 3   | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .                                   | 11 |
| 3.1 | Equação de Hamilton-Jacobi . . . . .                              | 11 |
| 3.2 | Equação da Continuidade . . . . .                                 | 16 |
| 3.3 | O Potencial Quântico e a Equação da Continuidade na TQM . . . . . | 17 |
| 3.4 | Os Postulados da Teoria Quântica do Movimento . . . . .           | 20 |
| 3.5 | Notação de Dirac e a Amplitude de Correlação . . . . .            | 21 |
| 4   | RESULTADOS . . . . .                                              | 26 |
| 4.1 | Potencial Quântico do Oscilador Harmônico Simples . . . . .       | 26 |
| 4.2 | Amplitude de Correlação para $n = 0$ : . . . . .                  | 28 |
| 4.3 | Amplitude de Correlação para $n = 1$ : . . . . .                  | 29 |
| 4.4 | Amplitude de Correlação para $n = 2$ : . . . . .                  | 29 |
| 4.5 | Amplitude de Correlação para $n = 3$ : . . . . .                  | 30 |
| 4.6 | Gráficos . . . . .                                                | 30 |
| 5   | CONCLUSÃO . . . . .                                               | 32 |
|     | REFERÊNCIAS . . . . .                                             | 34 |
|     | APÊNDICE A – POTENCIAL QUÂNTICO DO OHS . . . . .                  | 36 |
| A.1 | Para $n = 0$ : . . . . .                                          | 36 |
| A.2 | Para $n = 1$ : . . . . .                                          | 36 |
| A.3 | Para $n = 2$ : . . . . .                                          | 37 |
| A.4 | Potencial Quântico para qualquer $n$ . . . . .                    | 37 |

# 1 Introdução

A Mecânica Quântica é a maneira que os físicos usam para explicar os fenômenos que ocorrem em uma escala muito pequena do universo, pois, muitos desses fenômenos são totalmente contra intuitivos quando comparados aos fenômenos que ocorrem em escala macroscópica e que a Mecânica Clássica não mais consegue explicar [1], daí surgem várias interpretações físicas para explicar tais eventos [2]. Na tentativa de esclarecer esses novos mistérios que surgiram na física, houve uma explicação que se destacou mais que outras, a interpretação de Copenhagen se tornou tão usual ao longo dos anos que muitos na academia a tomam como o único fundamento da Mecânica Quântica aceitável, deixando de lado outras visões ou só concordando com trechos convenientes de outras interpretações. Nesse ponto, vale ressaltar que durante a graduação é ensinado três formulações equivalentes da Mecânica Clássica [3], já as várias formulações da Mecânica Quântica fica a depender da disponibilidade do professor e do tempo de duração do curso.

O desenvolvimento da Teoria Quântica do Movimento (TQM) se dá no início da década de 1920, Louis De Broglie vinha fomentando a ideia de que tinha do comportamento das partículas no mundo quântico [4], mas foi apenas em 1927 que a onda-piloto, ou onda guia, passou a ser discutida de fato, quando ele a apresentou de forma concreta na conferência de Solvay [5] e logo depois em um artigo [6]. Sendo uma partícula puntual, seu movimento deveria ser orientado por um campo de ondas  $\Psi$  que a própria partícula gera, assim, a onda e a partícula seriam elementos físicos distintos, não havendo mais a ideia, ou problema, da dualidade onda-partícula. Nessa proposta, a equação que representa o campo de ondas é também a solução para a equação de Schrödinger.

Mais tarde, em 1929, De Broglie também comentou sobre o assunto em seu livro sobre ondas [7], porém nota-se a descrença do físico francês nas sua própria ideia. Os físicos da época, muitos de renome, fizeram duras críticas assim que tiveram contato com o conceito de onda-piloto, pois a mesma ia contra as ideias que já estavam se consolidando como a já citada dualidade onda-partícula. Todas as críticas desecanderam em uma desmotivação por parte de Louis de Broglie, que relutou em continuar os trabalhos com a teoria da onda-piloto nos anos seguintes.

Já na década de 1950, o físico americano David Bohm estava prestes a publicar dois artigos com a sua interpretação da Mecânica Quântica. No período de revisão com os pares, tomou conhecimento das ideias de De Broglie, gostou delas e adaptou para que as duas ficassem alinhadas. Assim, em 1952, enquanto estava em um auto-exílio em São Paulo e trabalhando na USP [8], publicou os dois artigos [9, 10] com uma descrição matemática da sua teoria, que possui a capacidade de apresentar os mesmos resultados

já aceitos anteriormente e, também, a formulação de quatro postulados que são a base fundamental da Teoria Quântica do Movimento. Sua sugestão tem como premissa que a Mecânica Quântica usual está incompleta na hora de descrever um sistema individual e que é preciso uma interpretação em termos de variáveis ocultas para contornar esse problema [9].

Assim como as ideias de De Broglie, os artigos não foram tão bem recebidos pela velha guarda da física. Einstein, por exemplo, apesar de ter incentivado seu amigo pessoal, David Bohm, em busca dessa nova descrição da Mecânica Quântica, demonstrou sua insatisfação com a teoria em várias cartas trocadas e que foram reveladas depois, pois, ela continuava possuindo a ideia de não-localidade [11], assim como era a interpretação usual. David Bohm se esforçou muito para rebater todas as críticas que recebia de outros físicos, como pode ser lido em alguns artigos [12, 13], o que acabou tornando essa teoria consistente em vários aspectos.

Um fato relativamente novo que deve ser citado é que, em 2011, foi publicado um artigo na revista Science [14] que mostra um experimento de fenda dupla onde a posição e o momento de um fóton foram verificados simultaneamente em uma espécie de medida fraca de ambos, o resultado desse experimento possui as mesmas trajetórias se analisarmos o experimento pela perspectiva da Teoria Quântica do Movimento.

A interpretação que a Teoria Quântica do Movimento tem da Mecânica Quântica é a que será utilizada neste trabalho, mas fazendo menção sempre que necessário a Mecânica Quântica usual. No capítulo 2 será apresentado o objetivo geral trabalho se propõe a fazer ao calcular a Amplitude de Correlação usando a TQM.

O capítulo 3 desta monografia é uma revisão dos principais assuntos da física e matemática para demonstrar a base da Teoria Quântica do Movimento. Será mostrada a Equação de Hamilton-Jacobi e a Equação da Continuidade, onde logo em seguida será calculada outras equações que são análogas a elas, mas já usando a TQM. Também será descrito os quatro postulados dessa teoria, os propostos por David Bohm em seus artigos. Além disso, será revisado a notação de Dirac, já que a Amplitude de Correlação calculada será com tal notação.

Já o capítulo 4 mostrará os resultados deste trabalho. Primeiro a função do campo de onda de um sistema de Oscilador Harmônico Simples, o cálculo do seu Potencial Quântico e também da Força Quântica. Em seguida estará feito o passo a passo dos cálculos de Amplitude de Correlação para as ordens de 0 à 3 do oscilador harmônico, onde utiliza-se o Polinômio de Hermite.

Por fim, no capítulo 5 será discutido os resultados que foram obtidos no capítulo anterior, explorando o significado deles.

## 2 Objetivos

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo geral o cálculo e a discussão do resultado da Amplitude de Correlação utilizando a solução do sistema do Oscilador Harmônico Simples para a equação de Schrödinger na Teoria Quântica do Movimento.

Também possui os objetivos mais específicos, como:

- Fundamentar a Teoria Quântica do Movimento;
- Trabalhar as propriedades da Teoria Quântica do Movimento com o Oscilador Harmônico Simples;
- Calcular o Potencial Quântico do problema do Oscilador Harmônico Simples;
- Calcular a Força Quântica do problema do Oscilador Harmônico Simples;
- Apresentar os resultados do quadrado da Amplitude de Correlação do Oscilador Harmônico Simples até a ordem 3 do polinômio de Hermite;
- Discutir os resultados.

## 3 Fundamentação Teórica

### 3.1 Equação de Hamilton-Jacobi

A formulação Newtoniana é a forma mais habitual de se resolver os problemas de dinâmica na mecânica clássica, onde é aprendida já no ensino médio, porém, a busca por soluções se torna uma atividade fatigante a medida que a complexidade natural da física evolui. Existem outras abordagens equivalentes às Leis de Newton, são elas: Lagrangiana e Hamiltoniana. A depender do problema, elas podem atuar como um facilitador para se encontrar a resposta de um problema complicado, apesar de mesmo assim ainda ser uma atividade trabalhosa.

Antes de explorar tais abordagens, a base matemática delas deve ser definida: o Cálculo Variacional [3].

Seja uma função conhecida  $f[y(x), y'(x); x]$  contínua e diferenciável em  $y(x)$  e a integral  $J$ , um funcional, ou seja, uma função que depende de outra função:

$$J = \int_a^b f(y(x), y'(x); x) dx \quad (3.1.1)$$

Nesse caso em específico,  $J$  é um funcional de  $y(x)$ , que é representado como:

$$J = J[y(x)] \quad (3.1.2)$$

O problema fundamental do Cálculo Variacional é determinar uma função  $y(x)$  que faça a integral (3.1.1) ser um extremo, seja ele máximo ou mínimo.

Diferentemente do Cálculo Diferencial, em que é dado um acréscimo infinitesimal  $dx$  à variável para encontrar o ponto em que a função  $y(x)$  é um extremo, no Cálculo Variacional o acréscimo infinitesimal é dado à curva  $y(x)$  inteira. A notação utilizada para descrever essa curva infinitesimal é  $\delta y$ . Portanto a variação do funcional  $J$  é:

$$\delta J = J[y + \delta y, y' + \delta y'; x] - J[y, y'; x] \quad (3.1.3)$$

E ela será um extremo se satisfazer a condição  $\delta J = 0$ . Substituindo a definição (3.1.3) na equação (3.1.1):

$$\delta J = \int_a^b f(y + \delta y, y' + \delta y'; x) dx - \int_a^b f(y, y'; x) dx \quad (3.1.4)$$

Sem mudar suas propriedades, a função  $f(y + \delta y, y' + \delta y'; x)$  pode ser reescrita da seguinte forma:

$$f(y + \delta y, y' + \delta y'; x) = f(y, y'; x) + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \quad (3.1.5)$$

O que implica em:

$$\delta J = \int_a^b f(y, y'; x) dx + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' dx - \int_a^b f(y, y'; x) dx \quad (3.1.6)$$

O primeiro termo após o símbolo de igual da equação (3.1.6) é igual ao último, com a difereça do sinal, fazendo as devidas operações e evidenciando o restante, tem-se a expressão:

$$\delta J = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx \quad (3.1.7)$$

Uma consideração tem que ser feita aqui, como  $f(y, y'; x)$  deve passar nos extremos definidos  $a$  e  $b$ , então [3]:

$$\delta y(a) = \delta y(b) = 0 \quad (3.1.8)$$

Fazendo uma análise do segundo termo do lado direito da igualdade da equação (3.1.7), pode-se abrir ele em integral por partes:

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' = \left[ \delta y(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_a^b - \int_a^b \delta y \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} dx = \quad (3.1.9)$$

O primeiro termo à direita da igualdade é nulo devido a condição (3.1.8). Portanto, essa expressão se resume em:

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' = - \int_a^b \delta y \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} dx \quad (3.1.10)$$

Finalmente, substituindo (3.1.10) em (3.1.7), chega-se ao seguinte resultado:

$$\delta J = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (3.1.11)$$

Lembrando que a condição para encontrar o extremo é  $\delta J = 0$ , implicando, assim, em que toda a segunda parte da equação (3.1.11) também é igual à 0, porém, a quantidade  $\delta y dx$ , apesar de ser infinitesimalmente pequena, ela não pode ser 0, então chega-se a conclusão que apenas:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad (3.1.12)$$

A equação (3.1.12) é conhecida como Equação de Euler-Lagrange, que permite identificar qual o caminho em que a integral (3.1.1) é um extremo.

O Princípio de Hamilton pode ser definido a partir desse ponto: sendo a posição definida em coordenadas generalizadas por  $\mathbf{q}_i$ , a velocidade  $\dot{\mathbf{q}}_i$  e o tempo  $t$ , a função de

$L(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t)$  é a função de Lagrange que descreve a dinâmica de um sistema e  $S$  um funcional que é chamado de Ação, tal que:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t) dt \quad (3.1.13)$$

De todos os caminhos que esse sistema poderá seguir no espaço de configuração em um intervalo de tempo definido, o que ele irá seguir será aquele que minimizará a integral de Ação [3]. O resultado do extremo máximo não será abordado neste trabalho.

A função  $L(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t)$  é a Lagrangiana, ela é definida como a diferença entre as Energias Cinética  $T(\dot{\mathbf{q}}_i)$  e Potencial  $U(\mathbf{q}_i)$ :

$$L(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t) = T(\dot{\mathbf{q}}_i) - U(\mathbf{q}_i) \quad (3.1.14)$$

É perceptível que as equações (3.1.1) e (3.1.13) são equivalentes, se isso é verdade, pode-se realizar as mesmas operações que encontraram a equação (3.1.12) e será obtida outra equação:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = 0 \quad (3.1.15)$$

A expressão (3.1.15) é a Equação de Lagrange em coordenadas generalizadas.

O primeiro termo é chamado de força generalizada, definido em termos da derivada temporal do momento generalizado:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} = \dot{\mathbf{p}}_i \quad (3.1.16)$$

Já parte do segundo termo e conhecido como momento generalizado:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = \mathbf{p}_i \quad (3.1.17)$$

Lembrando que os termos (3.1.16) e (3.1.17) não são exatamente o momento e força encontrados comumente na mecânica clássica.

As equações de Lagrange, apesar de serem equivalentes e descreverem o mesmo movimento que leis de Newton, tem a característica de serem escalares, já que ao invés de descrever a dinâmica pela forças, o faz pela diferença entre as energias cinética e potencial.

Em um sistema fechado, a energia interna é conservada durante todo o tempo:

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad (3.1.18)$$

Ou seja, pode-se reescrever como:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}{\partial t} = 0 \quad (3.1.19)$$

E que resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( L - \sum_i \dot{\mathbf{q}}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) = 0 \quad (3.1.20)$$

Como a derivada temporal dessa expressão resulta em zero, pode-se dizer que todo o termo dentro dos parênteses é uma constante que convenientemente será chamada de  $-H$ , também verifica-se que o momento generalizado (3.1.17) está contido na expressão. Ao fazer as substituições, encontra-se a Hamiltoniana:

$$L - \sum_i \dot{\mathbf{q}}_i \mathbf{p}_i = -H \quad (3.1.21)$$

Que é reescrita como:

$$H = \sum_i \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{q}}_i - L(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t) \quad (3.1.22)$$

Em que  $H$  é uma função dependente da posição generalizada  $\mathbf{q}_i$ , do momento generalizado  $\mathbf{p}_i$  e do tempo  $t$ :

$$H = H(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t) \quad (3.1.23)$$

Diferenciando a equação (3.1.22), encontramos:

$$dH = \sum_i (\dot{\mathbf{q}}_i d\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_i d\dot{\mathbf{q}}_i) - \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} d\mathbf{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} d\dot{\mathbf{q}}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.1.24)$$

Substituindo o momento e força generalizada:

$$dH = \sum_i (\dot{\mathbf{q}}_i d\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_i d\dot{\mathbf{q}}_i) - \sum_i (\dot{\mathbf{p}}_i d\mathbf{q}_i + \mathbf{p}_i d\dot{\mathbf{q}}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.1.25)$$

Ou ainda:

$$\Rightarrow dH = \sum_i (\dot{\mathbf{q}}_i d\mathbf{p}_i - \dot{\mathbf{p}}_i d\mathbf{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.1.26)$$

Também diferenciando a equação (3.1.23):

$$dH = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} d\mathbf{p}_i + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i} d\mathbf{q}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (3.1.27)$$

Ao comparar (3.1.26) com a (3.1.27), verifica-se que:

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \quad (3.1.28)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (3.1.29)$$

As equações (3.1.28) e (3.1.29) são conhecidas como Equações Canônicas de Hamilton.

Além disso, tem-se como subproduto:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (3.1.30)$$

Que diz que a variação temporal da Hamiltoniana é igual a variação temporal negativa da Lagrangiana.

Por fim, chega-se ao método que dá título a esta seção, a Teoria de Hamilton-Jacobi. Seja  $K(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t)$  uma transformada canônica que é indeticamente nula a Hamiltoniana e que continua preservando as equações de Hamilton:

$$K(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t) = 0 \quad (3.1.31)$$

Tal que:

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t) \quad (3.1.32)$$

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t) \quad (3.1.33)$$

Como a equação (3.1.31) impõe que a Hamiltoniana transformada é zero, então as suas derivadas parciais são nulas, logo, as equações de Hamilton transformadas ficam:

$$\dot{\mathbf{Q}}_i = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}_i} = 0 \quad (3.1.34)$$

$$\dot{\mathbf{P}}_i = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}_i} = 0 \quad (3.1.35)$$

Mas para que a transformada exista, tem-se que encontrar uma função  $F$  que a sua variação temporal somada com a Hamiltoniana seja idêntica a sua transformada, onde:

$$K(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t) = H(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t) + \frac{\partial F(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t)}{\partial t} \quad (3.1.36)$$

E que também satisfaça a transformação:

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (3.1.37)$$

Isso só é verdade se a soma na equação (3.1.36) seja nula, seguindo a condição imposta em (3.1.31):

$$\frac{\partial F(\mathbf{q}_i, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}_i}, t)}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}_i, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}_i}, t\right) = 0 \quad (3.1.38)$$

A equação (3.1.38) é a Equação de Hamilton-Jacobi. É comum encontrarmos a função  $F$  escrita como  $F = S\left(\mathbf{q}_i, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_i}, t\right)$ . Logo, ela se transforma em:

$$\frac{\partial S\left(\mathbf{q}_i, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_i}, t\right)}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}_i, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_i}, t\right) = 0 \quad (3.1.39)$$

Em um problema para uma partícula livre que sofre a ação de um potencial independente do tempo, o Hamiltoniano é:

$$H\left(\mathbf{q}_i, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_i}, t\right) = \frac{[\nabla S(\mathbf{q}_i, t)]^2}{2m} + V(\mathbf{q}_i, t) \quad (3.1.40)$$

Portanto, ao substituir (3.1.40) em (3.1.39), a solução para a Equação de Hamilton-Jacobi fica:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V = 0 \quad (3.1.41)$$

A Teoria Quântica do Movimento possui um resultado análogo que será discutido seção 3.3.

## 3.2 Equação da Continuidade

A equação da continuidade aparece na física em diversos casos, mas todos com o mesmo intuito: garantir a conservação de alguma propriedade física em uma região delimitada do espaço. A equação geral para ela é definida da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \dot{\mathbf{q}}_i) = 0 \quad (3.2.1)$$

A letra grega  $\rho$  geralmente é definida como a densidade da propriedade física em questão e  $\dot{\mathbf{q}}_i$  a sua velocidade.

Na mecânica dos fluidos, a equação da continuidade (3.2.1) surge como uma maneira de explicar que a massa de um fluido que atravessa uma determinada região de espaço fechado em um tempo  $t$  é a mesma que sai em outro ponto do mesmo espaço [15], o termo  $\rho$  é a densidade da massa do fluido nessa denominação.

Já no eletromagnetismo, ela explica o fato das cargas elétricas não serem criadas ou destruídas sozinhas no interior de um espaço com volume  $V$  [16]. Na equação (3.2.1)  $\rho$  assume o papel de densidade de carga, sendo que surge o conceito de densidade de corrente  $\mathbf{j}$  em que  $\mathbf{j} = \rho \dot{\mathbf{q}}_i$ .

A mecânica quântica também possui uma equação de continuidade, ela explica a conservação de probabilidade  $P$  local de um sistema [17], sua equação também é análoga a (3.2.1):

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.2.2)$$

A letra  $P$ , na equação (3.2.2), é chamada de densidade de probabilidade e o  $\mathbf{j}$  de corrente de probabilidade, esse escrito como [17]:

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}_i, t) = - \left( \frac{i\hbar}{2m} \right) [\Psi^* \nabla \Psi - (\nabla \Psi^*) \Psi] \quad (3.2.3)$$

A letra grega  $\Psi = \Psi(\mathbf{q}_i, t)$  é a função de onda de Schrödinger para a mecânica quântica, dependente do tempo e da posição, e  $m$  é a massa, enquanto que  $i$  e  $\hbar$  são, respectivamente, as constantes imaginária e de Planck.

### 3.3 O Potencial Quântico e a Equação da Continuidade na TQM

A construção da base matemática da Teoria Quântica do Movimento se dá ao analisar a dinâmica de uma partícula puntual, que no mundo microscópico apresenta características de um movimento ondulatório, portanto, a equação de Schrödinger é a ideal para descrever esse tipo de movimento [18]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{q}_i, t)}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{q}_i, t) + V(\mathbf{q}_i, t) \Psi(\mathbf{q}_i, t) \quad (3.3.1)$$

Na equação (3.3.1) aparecem as constantes imaginária  $i$  e de Planck reduzida  $\hbar$ , também a massa  $m$  da partícula, o potencial  $V(\mathbf{q}_i, t)$  aplicado ao sistema e que pode ser constante no tempo, a função de campo de onda  $\Psi(\mathbf{q}_i, t)$ , sua derivada temporal e também o seu laplaciano.

David Bohm propõe também em seu artigo [9] que o tipo de solução ideal para a equação diferencial parcial de Schrödinger (3.3.1) tem a seguinte forma:

$$\Psi(\mathbf{q}_i, t) = R(\mathbf{q}_i, t) e^{\frac{i}{\hbar} S(\mathbf{q}_i, t)} \quad (3.3.2)$$

Tanto  $R(\mathbf{q}_i, t)$  quanto  $S(\mathbf{q}_i, t)$  são funções reais dependentes da posição e do tempo. Ao multiplicar a equação (3.3.2) pelo seu complexo conjugado, é obtido facilmente uma expressão que é conhecida na Teoria Quântica do movimento como a amplitude  $R(\mathbf{q}_i, t)$  da função de onda  $\Psi(\mathbf{q}_i, t)$ :

$$R(\mathbf{q}_i, t) = (\Psi \Psi^*)^{1/2} \quad (3.3.3)$$

Já ao dividir a equação (3.3.2) pelo seu próprio complexo conjugado, é obtida, também facilmente, uma outra expressão que é chamada de fase  $S(\mathbf{q}_i, t)$  da função do campo de onda  $\Psi(\mathbf{q}_i, t)$ :

$$S(\mathbf{q}_i, t) = \frac{\hbar}{2i} \ln \left( \frac{\Psi}{\Psi^*} \right) \quad (3.3.4)$$

Sabendo essas informações, voltamos a nossa atenção para resolver a equação de Schrödinger (3.3.1) para esse tipo de problema, primeiro é calculada a derivada temporal da equação (3.3.2):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = e^{\frac{i}{\hbar} S} \left[ \frac{\partial R}{\partial t} + R \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \right] \quad (3.3.5)$$

O laplaciano da equação (3.3.2) surge após algumas operações triviais, a sua aparência é a seguinte:

$$\nabla^2 \Psi = e^{\frac{i}{\hbar} S} \left[ \nabla^2 R + 2 \frac{i}{\hbar} \nabla R \cdot \nabla S + \frac{i}{\hbar} R \nabla^2 S - \frac{R}{\hbar^2} (\nabla S)^2 \right] \quad (3.3.6)$$

Os valores (3.3.2), (3.3.5) e (3.3.6) são os que serão substituídos na equação de Schrödinger (3.3.1), portanto, fazendo essas substituições e dividindo ambos os lados da equação pelo termo  $e^{\frac{i}{\hbar} S}$  que aparecerá em comum a todos, é encontrada a seguinte expressão:

$$i\hbar \left[ \frac{\partial R}{\partial t} + R \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \nabla^2 R + 2 \frac{i}{\hbar} \nabla R \cdot \nabla S + \frac{i}{\hbar} R \nabla^2 S - \frac{R}{\hbar^2} (\nabla S)^2 \right] + VR \quad (3.3.7)$$

Uma grande expressão onde ainda é possível realizar algumas operações para que ela seja simplificada, então, fazendo a distributiva dos termos em colchetes e separando a parte imaginária da parte real:

$$\left[ R \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 R + R \frac{(\nabla S)^2}{2m} + VR \right] - i \left[ \hbar \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\hbar}{m} \nabla R \cdot \nabla S + \frac{\hbar}{2m} R \nabla^2 S \right] = 0 \quad (3.3.8)$$

O resultado da equação acima (3.3.8) está dividido em duas partes igualadas a zero, sendo a primeira parte real e outra imaginária, porém, isso só é verdade se ambas forem iguais a zero de forma separada, da seguinte forma:

$$R \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 R + R \frac{(\nabla S)^2}{2m} + VR = 0 \quad (3.3.9)$$

$$\hbar \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\hbar}{m} \nabla R \cdot \nabla S + \frac{\hbar}{2m} R \nabla^2 S = 0 \quad (3.3.10)$$

Nota-se que os termos de amplitude  $R(\mathbf{q}_i, t)$  e fase  $S(\mathbf{q}_i, t)$  da função de onda  $\Psi(\mathbf{q}_i, t)$  estão contidos tanto em (3.3.9) como em (3.3.10), formando um par de equações acopladas que serão analisadas a seguir.

A primeira das duas equações, (3.3.9), possui um resultado mais direto de ser obtido, porém, bastante importante para a definição de uma das principais bases da Teoria Quântica do Movimento. Basta multiplicar a expressão toda por  $1/R$  e reorganizar os termos, que chega-se ao seguinte resultado:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0 \quad (3.3.11)$$

Os primeiros três termos da equação (3.3.11) é a já conhecida equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula livre sob a ação de um potencial  $V$ , a mesma encontrada em (3.1.41). Mas o que nos interessa aqui é o último termo, que, na Teoria Quântica do Movimento, é chamado de Potencial Quântico  $Q$ :

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \quad (3.3.12)$$

O resultado (3.3.12) é interpretado como um potencial de caráter totalmente quântico e que age sob as partículas pontuais determinando a direção do movimento que elas seguirão, mesmo na ausência de forças externas, pois esse potencial surge de forma natural só pelo fato da partícula existir. O Potencial Quântico (3.3.12) pode ser descrito como a forma matemática do que Louis De Broglie chama, desde a década de 1920, em seus trabalhos [6, 7] de onda-guia ou onda-piloto, uma entidade física que existe ao mesmo tempo que as partículas, não havendo mais a ideia de dualidade da onda-partícula.

A Força Quântica  $\mathbf{F}_Q$  também pode ser encontrada ao calcular o gradiente negativo do potencial (3.3.12):

$$\mathbf{F}_Q = -\nabla Q \quad (3.3.13)$$

Voltando a atenção para a segunda equação (3.3.10), ao multiplicar essa expressão inteira por  $2R/\hbar$  é encontrado:

$$2R \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{2R}{m} \nabla R \cdot \nabla S + \frac{R^2}{m} \nabla^2 S = 0 \quad (3.3.14)$$

Aqui surgem algumas trivialidades, como notar que o primeiro termo da (3.3.14) pode ser reescrito assim:

$$2R \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R^2}{\partial t} \quad (3.3.15)$$

Também é de se notar que os termos restantes da equação (3.3.14) formam a seguinte derivada de produto:

$$\frac{2R}{m} \nabla R \cdot \nabla S + \frac{R^2}{m} \nabla^2 S = \nabla \cdot \left( R^2 \frac{\nabla S}{m} \right) \quad (3.3.16)$$

Então substituindo as equações (3.3.15) e (3.3.16) em (3.3.14), tem-se uma expressão mais simplificada e com um significado interessante:

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left( R^2 \frac{\nabla S}{m} \right) = 0 \quad (3.3.17)$$

A expressão (3.3.17) é uma equação de continuidade análoga a que aparece em (3.2.2) na seção anterior 3.2, o caráter probabilístico da Teoria Quântica do Movimento vem dessa equação, já que nela está contida a conservação de probabilidade das possíveis trajetórias que uma partícula pontual pode seguir. Nessa expressão é identificada a densidade de probabilidade  $P = R^2(\mathbf{q}_i, t)$  e a corrente de probabilidade  $\mathbf{j} = R^2 \nabla S / m$ , onde também é reconhecido o termo da velocidade  $\dot{\mathbf{q}}_i = \nabla S / m$ .

### 3.4 Os Postulados da Teoria Quântica do Movimento

Com os resultados obtidos na seção anterior 3.3, quatro postulados acabaram sendo sugeridos por David Bohm em seus dois famosos artigos [9,10] para o desenvolvimento da Teoria Quântica do Movimento, são eles:

**Primeiro Postulado:** *A evolução temporal e espacial de uma partícula puntual acontece sob a orientação da onda-piloto que se propaga continuamente como uma guia junto a própria partícula.*

Esse é o postulado base da Teoria Quântica do Movimento, foi De Broglie que propôs ele em artigo apresentado na conferência de Solvay de 1927 [6] e, posteriormente, publicado em livro [7], e que também foi duramente criticado, desencorajando o próprio De Broglie por anos a seguir nessa linha de pesquisa, trabalho este que só foi retomado por Bohm, já na década de 50, em seus dois artigos [9,10].

A característica da onda-piloto gerada pela partícula puntual de se propagar em todo espaço explica o caso das partículas emaranhadas, a onda-piloto seria a responsável por carregar a informação de interferência que ocorre de uma partícula para outra. Foi essa conclusão de uma teoria não-local que fez Einstein discordar tanto em De Broglie, como em David Bohm anos depois, além de já não concordar anteriormente com a também descrição não-local da interpretação de Copenhagen.

**Segundo Postulado:** *A Função  $\Psi(\mathbf{q}_i, t)$ , que também é solução da Equação de Schrödinger, descreve a dinâmica da onda-guia.*

A Equação de Schrödinger (3.3.1) está presente na Teoria Quântica do Movimento também, como descrição da dinâmica da onda-piloto, gerando, assim, as duas equações principais dessa teoria: a equação de Hamilton-Jacobi (3.3.11) e a Equação da Continuidade (3.3.17).

Outra diferença entre a mecânica quântica usual com a teoria apresentada até aqui, a função de onda  $\Psi(\mathbf{q}_i, t)$  não descreve apenas uma onda, mas sim um campo de ondas, as ondas-pilotos, que é gerado pela própria partícula. Também nessa teoria, a onda e a partícula são elementos físicos distintos, não havendo mais a interpretação de dualidade onda-partícula já conhecida até então.

**Terceiro Postulado:** *A dinâmica da partícula é descrita solucionando a equação:*

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\nabla S}{m} \quad (3.4.1)$$

tendo a condição inicial  $\mathbf{q}_i(0) = \mathbf{q}_{i0}$ .

Essa conclusão surge quando se compara as equações da continuidade (3.2.1) e (3.3.17), onde é identificado o termo de velocidade  $\dot{\mathbf{q}}_i$ .

De Broglie tenta manter a ideia do mundo clássico em que é possível obter a posição

e velocidade de uma partícula em cada instante de tempo, onde a nuvem de probabilidade passa a ser uma nuvem de possíveis caminhos e a onda-piloto guie a partícula por uma dessas trajetórias.

É importante ressaltar que, apesar da Teoria Quântica do Movimento flertar com a Mecânica Clássica com equações análogas, mas não idênticas, ela ainda possui um caráter totalmente probabilístico garantido pela equação da continuidade (3.3.17), mas ela não está baseada em uma teoria somente de probabilidade.

**Quarto Postulado:** *A probabilidade de uma partícula ser encontrada entre as posições  $\mathbf{q}_i$  e  $\mathbf{q}_i + d\mathbf{q}_i$  no tempo  $t$  é dada pela expressão:  $R^2(\mathbf{q}_i, t)d^3r$ , tal que,  $R^2 = |\Psi|^2$ .*

O aspecto probabilístico da Teoria Quântica do Movimento, já citado antes, é mostrado neste postulado, quando o quadrado da amplitude  $R(\mathbf{q}_i, t)$  da função de onda  $\Psi(\mathbf{q}_i, t)$  é normalizado, mas ela surge apenas porque não é possível precisar as condições iniciais do sistema [9].

### 3.5 Notação de Dirac e a Amplitude de Correlação

Os estados físicos de um sistema na Mecânica Quântica são descritos por vetores de estado em um espaço vetorial complexo, então seja um  $\alpha$  qualquer, esses vetores de estado podem ser representados pela notação  $|\alpha\rangle$  chamada de ket [17]. Matricialmente, os kets de tamanho  $m$  possuem apenas uma coluna com  $m$  linhas, assim:

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \quad (3.5.1)$$

Como dito anteriormente, trata-se de um espaço vetorial complexo, portanto, existe um outro vetor de estado que é o complexo conjugado do ket, ele é definido na notação de Dirac por  $\langle\alpha|$  e é chamado de bra. Matricialmente, um bra de tamanho  $n$  possuem somente uma linha, mas  $n$  colunas:

$$\langle\alpha| = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n) \quad (3.5.2)$$

Tanto o vetor de estado bra  $\langle\alpha|$  como o ket  $|\alpha\rangle$  possuem o mesmo tamanho, pois um é apenas o complexo conjugado do outro.

O produto com os vetores de estado deve ocorrer sempre entre um bra e um ket, porém, como já é de conhecimento, matricialmente eles possuem formas diferentes, portanto a ordem em que os vetores são colocados nessa operação influencia no resultado final, ou seja, não são operações comutativas. Se for feito o cálculo na ordem bra e depois

um ket  $\langle \alpha | \alpha \rangle$ , é notado que o resultado do produto entre uma matriz linha por uma matriz coluna, ambas de mesmo tamanho, gera um escalar, esse é o produto interno na notação de Dirac:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \quad (3.5.3)$$

O contrário, o produto da matriz de coluna do ket pela matriz linha do bra  $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ , resulta em uma outra matriz, essa de tamanho  $m \times n$ . Essa é a forma do produto externo na notação de Dirac:

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (3.5.4)$$

Apesar da notação de Dirac ser diferente da forma usual que se tem para trabalhar com vetores e que é ensinada no início da graduação, as propriedades aplicadas a eles são as mesmas da álgebra linear, tais como:

- A multiplicação de uma constante  $c$  à um vetor de estado gera outro vetor de estado, podendo ser escrito tanto a direita quanto a esquerda, comutando, o mesmo vale para os bras:

$$c|\alpha\rangle = |\alpha\rangle c \quad (3.5.5)$$

$$c\langle\alpha| = \langle\alpha| c \quad (3.5.6)$$

- A soma de dois kets geram um outro ket, assim como a soma de dois bras geram outro bra:

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle \quad (3.5.7)$$

$$\langle\alpha| + \langle\beta| = \langle\gamma| \quad (3.5.8)$$

- Seja um operador  $A$  que opere sobre os vetores de estado, ele deve ser escrito necessariamente a esquerda dos kets e essa operação gera outro ket. No caso dos bras, ele fica a direita gerando outro bra:

$$A \cdot (|\alpha\rangle) = A|\alpha\rangle \quad (3.5.9)$$

$$(\langle\alpha|) \cdot A = \langle\alpha|A \quad (3.5.10)$$

Os operadores também possuem suas próprias propriedades, tais como as regras de comutação que devem ser respeitadas quando as operações forem feitas sobre os vetores de estado.

A Teoria Quântica do Movimento é uma interpretação diferente, mas que possui os mesmos resultados encontrados na Mecânica Quântica usual. Essa segunda utiliza a notação de Dirac para descrever os vetores de estados da função de onda  $|\Psi(\mathbf{q}_i, t)\rangle$ . Portanto, não é errado usar um significado da Mecânica Quântica usual e aplicar em um resultado da TQM.

A evolução de um sistema físico ao longo do tempo pode apresentar características similares ou diferentes das condições iniciais a depender do problema. A medida de correlação entre os dois estados de tempo  $t$  diferentes é feita utilizando o conceito de Amplitude de Correlação  $C(t)$ , o seu cálculo é feito com o produto interno, equação (3.5.3), entre o estado inicial com o tempo  $t_0$  com o estado no tempo  $t$  e isso nos diz o quão os dois estados da mesma onda, em tempos diferentes, estão correlacionados [17]:

$$C(t) = \langle \Psi(\mathbf{q}_i, t_0) | \Psi(\mathbf{q}_i, t) \rangle \quad (3.5.11)$$

O ket  $|\Psi(\mathbf{q}_i, t)\rangle$  da equação (3.5.11) pode ser descrito utilizando o conceito de operador temporal  $U(t)$  que nos é apresentado na Mecânica Quântica usual. Para conhecer a evolução de um estado ao longo do tempo, basta operar o operador temporal sob o ket do vetor de estado inicial  $|\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)\rangle$ , assim:

$$|\Psi(\mathbf{q}_i, t)\rangle = U(t) |\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)\rangle \quad (3.5.12)$$

O operador temporal é apresentado na mecânica quântica é a exponencial com a seguinte forma [17]:

$$U(t) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t) dt \right] \quad (3.5.13)$$

Supondo que a Hamiltoniana  $\hat{H}(t)$ , a que descreve a dinâmica do sistema, uma constante em todo o tempo  $t$  e também que ela seja hermitiana, a integral no interior da exponencial se torna algo trivial e o operador temporal passa a ser em um tempo inicial  $t_0 = 0$ :

$$U(t) = \exp \left[ -\frac{i\hat{H}t}{\hbar} \right] \quad (3.5.14)$$

Uma propriedade da mecânica quântica é quando o Hamiltoniano  $\hat{H}$  opera sob um vetor de estado ele resulta nos autovalores de energia  $E$  do sistema:

$$\hat{H} |\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)\rangle = E |\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)\rangle \quad (3.5.15)$$

Assim, quando o operador temporal opera sob o vetor de estado, ele pode passar a ser escrito em termos dos autovalores de energia:

$$\exp\left[-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right]|\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)\rangle = \exp\left[-\frac{iEt}{\hbar}\right]|\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)\rangle \quad (3.5.16)$$

Por fim, substituindo a equação (3.5.16) em (3.5.12), tem-se então que o operador temporal aplicado ao vetor de estado é:

$$|\Psi(\mathbf{q}_i, t)\rangle = U(t)|\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)\rangle = \exp\left[-\frac{iEt}{\hbar}\right]|\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)\rangle \quad (3.5.17)$$

A Amplitude de Correlação (3.5.11), com a substituição da equação (3.5.17), pode ser medida pela seguinte equação:

$$C(t) = \langle\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)|\exp\left[-\frac{iEt}{\hbar}\right]|\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)\rangle \quad (3.5.18)$$

Ou ainda:

$$C(t) = \langle\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)|\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)\rangle\exp\left[-\frac{iEt}{\hbar}\right] \quad (3.5.19)$$

No interior do resultado (3.5.19) há o produto interno entre o estado inicial e seu complexo conjugado, porém, isso é o mesmo que calcular o módulo quadrado da função de onda no estado inicial:

$$\langle\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)|\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)\rangle = |\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)|^2 \quad (3.5.20)$$

A equação (3.5.20) foi vista anteriormente no quarto posulado na seção 3.4, onde:

$$R^2 = |\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)|^2 \quad (3.5.21)$$

Se for feito o cálculo da Fase da Onda, equação (3.3.4), com a função de onda (3.5.17), sabendo que o vetor de estado inicial  $|\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)\rangle$  é uma função real, encontra-se o valor para  $S$ :

$$S = -Et \quad (3.5.22)$$

Então, ao calcular a Amplitude de Correlação, pode-se escrever em termos da Amplitude e Fase da Onda, tal-que:

$$C = R^2\exp\left[\frac{iS}{\hbar}\right] \quad (3.5.23)$$

Porém, o quadrado do resultado (3.5.23) é o que nos interessa aqui, pois é ele que pode ser medido [19]:

$$C^2(t) = C(t)C^*(t) \quad (3.5.24)$$

O termo  $C^*(t)$  é o complexo conjugado do resultado encontrado pela equação (3.5.23), portanto, na Teoria Quântica do Movimento, a Amplitude de Correlação pode ser calculada com:

$$C^2(t) = R^4 \quad (3.5.25)$$

Quando, pela equação (3.5.25), tem-se que  $C^2(t) = 1$ , então também pode-se dizer que há uma similitude perfeita entre os vetores de estado inicial  $|\Psi(\mathbf{q}_i, t_0)\rangle$  e final  $|\Psi(\mathbf{q}_i, t)\rangle$  do campo de onda, caso contrário, os vetores de estado não estão correlacionados.

## 4 Resultados

### 4.1 Potencial Quântico do Oscilador Harmônico Simples

Os sistemas oscilatórios são encontrados facilmente na natureza tanto em escala macroscópica e como também em escala microscópica, portanto, é objeto de interesse em todas as perspetivas físicas, na Teoria Quântica do Movimento não seria diferente.

Fazendo o uso do segundo postulado, apresentado na seção 3.4, deve existir uma função do campo de onda  $\Psi(\mathbf{q}_i, t)$  que é associada ao movimento do oscilador harmônico simples e que também é solução da equação de Schrödinger (3.3.1), para se chegar em tal solução, podemos utilizar da seguinte técnica de solução de equações diferenciais parciais [20]:

$$\Psi(\mathbf{q}_i, t) = \Psi(\mathbf{q}_i)\Psi(t) \quad (4.1.1)$$

A equação (4.1.1) é uma função separável, onde a parte da função de onda que é relacionada ao tempo possui uma solução trivial, já que a equação de Schrödinger (3.3.1) se torna uma Equação Diferencial de primeira ordem e separável:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi \quad (4.1.2)$$

Um fato a se notar que a solução para (4.1.2) é o próprio operador temporal encontrado na interpretação usual da mecânica quântica [17]:

$$\Psi(t) = \exp\left[-\frac{Eit}{\hbar}\right] \quad (4.1.3)$$

Já a parte espacial surge quando trabalha-se com a forma estacionária da equação de Schrödinger (3.3.1) [21]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = E\Psi \quad (4.1.4)$$

Uma partícula de massa  $m$  que oscila em uma frequência  $\omega$  possui a energia potencial:

$$V(\mathbf{q}_i) = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{q}_i^2 \quad (4.1.5)$$

Substituindo o potencial em (4.1.4):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{q}_i^2\Psi = E\Psi \quad (4.1.6)$$

Ou ainda:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{m\omega^2 \mathbf{q}_i}{2} - E \right) \Psi \quad (4.1.7)$$

A equação (4.1.7) é conhecida como a Equação Diferencial de Hermite. As soluções para esse tipo de equação é facilmente encontrada na literatura e possuem a seguinte forma [22]:

$$\Psi(\mathbf{q}_i) = H_n \exp \left[ -\frac{m\omega^2}{2\hbar} \right] \quad (4.1.8)$$

Sendo que o termo  $H_n$  é o polinômio de Hermite e ele surge da fórmula de Rodrigues [22]:

$$H_n = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi} e^{-\xi^2} \quad (4.1.9)$$

Tal que  $n = 0, 1, 2, \dots$  e  $\xi$  é:

$$\xi = \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/2} \mathbf{q}_i \quad (4.1.10)$$

Ou seja, a função de onda  $\Psi(\mathbf{q}_i, t)$  (4.1.1) que é solução para a equação de Schrödinger é o produto da solução temporal (4.1.3) com a solução espacial (4.1.8), resultando em:

$$\Psi(\mathbf{q}_i, t) = H_n \exp \left[ -\frac{m\omega^2}{2\hbar} \right] \exp \left[ -\frac{Eit}{\hbar} \right] \quad (4.1.11)$$

O apêndice A possui os cálculos que resultam no potencial quântico para o oscilador harmônico:

$$Q_n = -\frac{m\omega^2}{2} \mathbf{q}_i^2 + \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (4.1.12)$$

Onde os números inteiros  $n = 0, 1, 2, \dots$  são os mesmos do polinômio de Hermite (4.1.9). O resultado do Potencial Quântico (4.1.12) é o mesmo encontrado na referência [18]. Apesar da energia total compreender os potenciais clássico e quântico, o comportamento do oscilador quântico é diferente do oscilador clássico.

Já a força quântica do problema do oscilador harmônico, calculando o negativo do laplaciano da equação (3.3.13), é simplesmente:

$$\mathbf{F}_Q = m\omega^2 \mathbf{q}_i \quad (4.1.13)$$

A força (4.1.13) é a mesma para todos os potenciais quânticos do oscilador harmônico simples, pois a parte da equação (4.1.12) dependente da posição não se altera com a

mudança dos valores de  $n$ . Na mecânica clássica o termo  $\omega^2 \mathbf{q}_i$  é conhecido como aceleração centrípeta [23].

Outro resultado importante encontrado é a fase do sistema  $S(\mathbf{q}_i, t)$  com a equação (3.3.4):

$$S_n = -Et \quad (4.1.14)$$

O que implica que a velocidade é nula, pois, pela equação (3.4.1) do terceiro postulado, já que a fase (4.1.14) é independente da posição, fazendo sua derivada espacial ser zero, portanto, um sistema estacionário.

## 4.2 Amplitude de Correlação para $n = 0$ :

Para o cálculo da Amplitude de Correlação, a equação (4.1.11) precisa ser normalizada, isso pode ser feito ao multiplicar pela constante de normalização para esse tipo de problema [24]:

$$\alpha = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} \quad (4.2.1)$$

Portanto, a função de onda normalizada para se calcular as amplitudes de correlação é a seguinte:

$$\Psi(\mathbf{q}_i, t) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} H_n \exp \left[ -\frac{m\omega^2}{2\hbar} \right] \exp \left[ -\frac{Eit}{\hbar} \right] \quad (4.2.2)$$

Essa alteração não modifica os valores da fase  $S$ , do Potencial Quântico  $Q$  e, consequentemente, da Força Quântica  $F_Q$  encontrados na seção anterior.

A função de onda que descreve o movimento oscilatório, onde  $n = 0$  no polinômio de Hermite na equação (4.2.2) é escrita assim:

$$\Psi_0(\mathbf{q}_i, t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp \left[ -\frac{m\omega}{2\hbar} \mathbf{q}_i^2 \right] \exp \left[ -\frac{Eit}{\hbar} \right] \quad (4.2.3)$$

Ao normalizar a função de onda  $\Psi_0(\mathbf{q}_i, t)$ , é visto que para este caso:

$$\frac{m\omega}{\hbar} = 1 \quad (4.2.4)$$

Portanto, ela é reescrita como:

$$\Psi_0(\mathbf{q}_i, t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp \left[ -\frac{\mathbf{q}_i^2}{2} \right] \exp \left[ -\frac{Eit}{\hbar} \right] \quad (4.2.5)$$

Porém, no tempo inicial,  $t_0 = 0$ , ela assume a seguinte forma:

$$\Psi_0(\mathbf{q}_i, t_0) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp \left[ -\frac{\mathbf{q}_i^2}{2} \right] \quad (4.2.6)$$

Pela equação (3.5.21), tem-se que o resultado acima é a própria Amplitude da Onda:

$$R_0 = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp \left[ -\frac{\mathbf{q}_i^2}{2} \right] \quad (4.2.7)$$

Então basta calcular a quarta potência do valor acima para se obter o quadrado da Amplitude de Correlação do Oscilador Harmônico Simples para o polinômio de Hermite com  $n = 0$ :

$$C_0^2(t) = \frac{1}{\pi} \exp \left[ -2\mathbf{q}_i^2 \right] \quad (4.2.8)$$

### 4.3 Amplitude de Correlação para $n = 1$ :

Para as ordens superiores, o método continua o mesmo mudando apenas a função  $\Psi_n(\mathbf{q}_i, t)$ , pois o polinômio de Hermite normalizado muda para cada  $n$  inteiro. Portanto, tem-se a seguinte função do campo de onda  $\Psi_1(\mathbf{q}_i, t)$  já normalizada:

$$\Psi_1(\mathbf{q}_i, t) = \frac{2\mathbf{q}_i}{\pi^{1/4}\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{\mathbf{q}_i^2}{2} \right] \exp \left[ -\frac{Eit}{\hbar} \right] \quad (4.3.1)$$

A normalização para esse caso também resulta em:

$$\frac{m\omega}{\hbar} = 1 \quad (4.3.2)$$

A sua função de onda inicial, em  $t_0 = 0$ , passa a ser:

$$\Psi_1(\mathbf{q}_i, t_0) = \frac{2\mathbf{q}_i}{\pi^{1/4}\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{\mathbf{q}_i^2}{2} \right] \quad (4.3.3)$$

Calculando sua quarta potência, tem-se o valor do quadrado da Amplitude de Correlação:

$$C_1^2 = \frac{4\mathbf{q}_i^4}{\pi} \exp \left[ -2\mathbf{q}_i^2 \right] \quad (4.3.4)$$

### 4.4 Amplitude de Correlação para $n = 2$ :

A função de onda para um sistema oscilatório com  $n = 2$  utilizando a equação de normalização (4.2.2):

$$\Psi_2(\mathbf{q}_i, t) = \frac{(36\mathbf{q}_i^2 - 2)}{\pi^{1/4}\sqrt{8}} \exp \left[ -\frac{9\mathbf{q}_i^2}{2} \right] \exp \left[ -\frac{Eit}{\hbar} \right] \quad (4.4.1)$$

Normalizando a função de onda acima, tem-se que:

$$\frac{m\omega}{\hbar} = 9 \quad (4.4.2)$$

Em  $t_0 = 0$ :

$$\Psi_2(\mathbf{q}_i, t_0) = \frac{(36\mathbf{q}_i^2 - 2)}{\pi^{1/4}\sqrt{8}} \exp\left[-\frac{9\mathbf{q}_i^2}{2}\right] \quad (4.4.3)$$

E a sua Amplitude de Correlação ao quadrado:

$$C_2^2(t) = \frac{(36\mathbf{q}_i^2 - 2)^4}{64\pi} \exp\left[-18\mathbf{q}_i^2\right] \quad (4.4.4)$$

## 4.5 Amplitude de Correlação para $n = 3$ :

A função de onda para um sistema oscilatório com  $n = 3$ :

$$\Psi_3(\mathbf{q}_i, t) = \frac{[29791\mathbf{q}_i^3 - 186\mathbf{q}_i]}{\pi^{1/4}\sqrt{48}} \exp\left[-\frac{961\mathbf{q}_i^2}{8}\right] \exp\left[-\frac{Eit}{\hbar}\right] \quad (4.5.1)$$

Em  $t_0 = 0$ :

$$\Psi_3(\mathbf{q}_i, t_0) = \frac{[29791\mathbf{q}_i^3 - 186\mathbf{q}_i]}{\pi^{1/4}\sqrt{48}} \exp\left[-\frac{961\mathbf{q}_i^2}{8}\right] \quad (4.5.2)$$

A amplitude de correlação ao quadrado:

$$C_3^2(t) = \frac{[29791\mathbf{q}_i^3 - 186\mathbf{q}_i]^4}{2304\pi} \exp\left[-\frac{961\mathbf{q}_i^2}{2}\right] \quad (4.5.3)$$

## 4.6 Gráficos

A seguir serão apresentadas as curvas geradas pelos quadrados das Amplitudes de Correlação (4.2.8), (4.3.4), (4.4.4) e (4.5.3). As imagens mostram a relação dos quadrados da Amplitude  $C_n^2$  durante um período de tempo  $t$ .

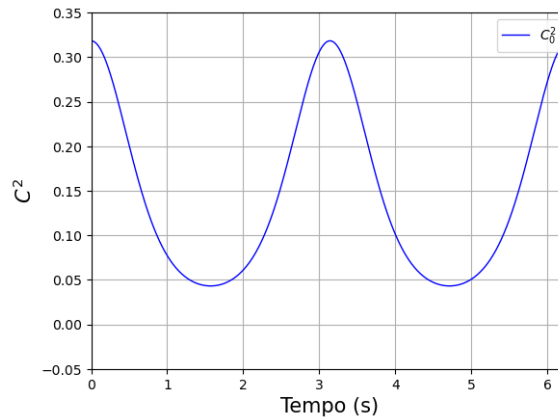


Figura 1 – Quadrado da Amplitude de Correlação  $C_0^2$ , resultado (4.2.8), de um Oscilador Harmônico Simples com o nível de energia  $n = 0$  ao longo do tempo.

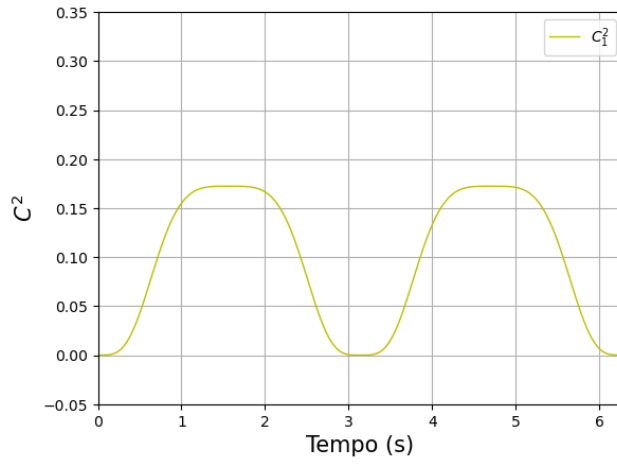


Figura 2 – Quadrado da Amplitude de Correlação  $C_1^2$ , resultado (4.3.4), de um Oscilador Harmônico Simples com o nível de energia  $n = 0$  ao longo do tempo.

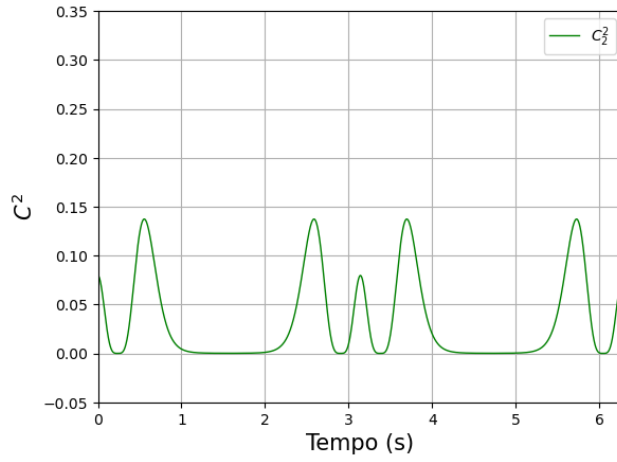


Figura 3 – Quadrado da Amplitude de Correlação  $C_2^2$ , resultado (4.4.4), de um Oscilador Harmônico Simples com o nível de energia  $n = 0$  ao longo do tempo.

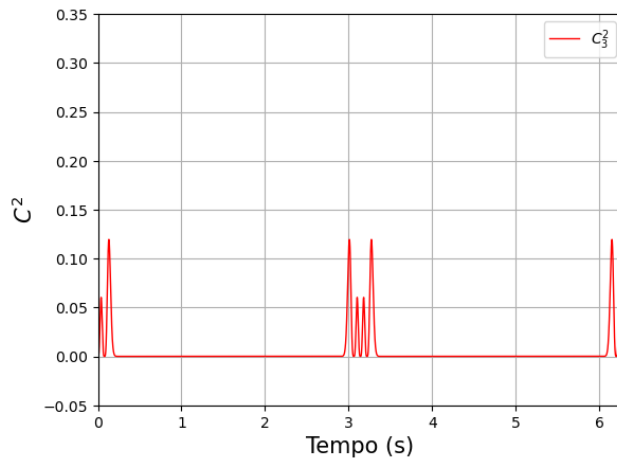


Figura 4 – Quadrado da Amplitude de Correlação  $C_3^2$ , resultado (4.5.3), de um Oscilador Harmônico Simples com o nível de energia  $n = 0$  ao longo do tempo.

## 5 Conclusão

Louis de Broglie e David Bohm encontraram na Teoria Quântica do Movimento uma interpretação que obtem os mesmos resultados que são achados na Mecânica Quântica usual de Copenhagen, porém, a diferença prática entre as duas teorias é que, a depender do problema, a matemática pode ser mais trivial ou até mais complicada, além do formalismo e, também, a forma de como interpretar tais resultados. No caso da Amplitude de Correlação, o formalismo da Teoria Quântica do Movimento apenas eleva o valor da função de Campo de Onda, no tempo inicial  $t = 0$ , à quarta potência, ao invés de usar a notação de Dirac para trabalhar com os vetores de estado, mas vale salientar novamente que os resultados encontrados dessas Amplitudes com as duas descrições são os mesmos.

Ao normalizar as Funções de Onda do problema do Oscilador Harmônico com a equação (4.2.2) para se encontrar os valores do quadrado das Amplitudes de Correlação, é notado que as curvas geradas estão bem abaixo de  $C_0^2 = 1$ , possuindo uma descrição não tão precisa entre os dois estados do mesmo sistema [25].

Os gráficos também apresentam comportamento de repetição ao longo do tempo, pois o tipo de solução para o problema do Oscilador Harmônico Simples apresenta uma combinação linear de senos e cossenos, com resultados que variam entre 0 e 1. A Figura 1 é a única em que a curva não apresenta o valor  $C_0^2 = 0$ , pois a equação que a representa, (4.2.8), é a única em que há somente o termo exponencial acompanhado a uma constante, portanto um valor não nulo. O restante dos resultados possuem a variável de posição  $\mathbf{q}_i$  efetuando o produto com a exponencial.

Os picos das curvas são menores na medida em que é aumentado o valor de  $n$  do Polinômio de Hermite, também é visto que o valor do quadrado da Amplitude de Correlação passa mais tempo em  $C_0^2 = 0$  nesses mesmos casos, revelando a falta de correlação nesses períodos de tempo.

O Potencial Quântico (4.1.12) explica a alteração das características de um sistema físico mesmo na ausência de outros potenciais, explicando assim a falta de correlação entre os dois estados.

O estudo de teorias de fundamentos da Mecânica Quântica, como é o caso da Teoria Quântica do Movimento, em paralelo com a teoria usual é importante para se criar o senso crítico em relação a física como um todo, não apenas para considerar uma teoria como a certa e a outra como a errada, mas sim na compreensão de que há ainda muito o que ser explorado na física. A ideia da existência da onda-piloto com certeza gera uma estranheza à primeira vista, pois sugere a aparição de um campo fantasmagórico gerado pela partícula e que orienta o movimento dela mesmo. Apesar de não serem a mesma

coisa, na física há outro fenômeno bastante conhecido em que a dinâmica de partículas faz surgir um campo, quando elétrons estão em movimento, um campo magnético associado a elas é gerado [26].

# Referências

- 1 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Ótica, Relatividade, Física Quântica*. São Paulo: Editora Blucher, 2010. v. 4. 8
- 2 STYER, D. F. et al. Nine formulations of quantum mechanics. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 70, n. 3, p. 288–297, 2002. 8
- 3 LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. 8, 11, 12, 13
- 4 BROGLIE, L. D. Onde et quanta. *Comptes Rendus*, v. 177, p. 507, 1923. 8
- 5 BACCIAGALUPPI, G.; VALENTINI, A. *Quantum theory at the crossroads: reconsidering the 1927 Solvay conference*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 8
- 6 BROGLIE, L. D. La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement. *J. Phys. Radium*, v. 8, n. 5, p. 225–241, 1927. 8, 19, 20
- 7 BROGLIE, L. D. *An Introduction to the Study of Wave Mechanics*. London: Phillips Press, 2008. 8, 19, 20
- 8 JR, O. F.; PATY, M.; BARROS, A. L. d. R. David bohm, sua estada no brasil e a teoria quântica. *Estudos Avançados*, SciELO Brasil, v. 8, p. 53–82, 1994. 8
- 9 BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. i. *Physical Review*, v. 85, n. 2, p. 166, 1952. 8, 9, 17, 20, 21
- 10 BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. ii. *Physical Review*, v. 85, n. 2, p. 180, 1952. 8, 20
- 11 EINSTEIN and the Macroscopic Limit of Quantum Mechanics. In: EINSTEIN'S Struggles with Quantum Theory: A Reappraisal. New York, NY: Springer New York, 2007. p. 141–154. ISBN 978-0-387-71520-9. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-0-387-71520-9\\_7](https://doi.org/10.1007/978-0-387-71520-9_7)>. 9
- 12 BOHM, D. Reply to a criticism of a causal re-interpretation of the quantum theory. *Physical Review*, APS, v. 87, n. 2, p. 389, 1952. 9
- 13 BOHM, D. Comments on an article of takabayasi concerning the formulation of quantum mechanics with classical pictures. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 9, n. 3, p. 273–287, 1953. 9
- 14 KOCSIS, S. et al. Observing the average trajectories of single photons in a two-slit interferometer. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 332, n. 6034, p. 1170–1173, 2011. 9
- 15 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor*. São Paulo: Editora Blucher, 2002. v. 2. 16
- 16 GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011. 16

- 
- 17 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Mecânica Quântica Moderna*. Porto Alegre: Bookman, 2013. 16, 17, 21, 23, 26
- 18 HOLLAND, P. R. *The Quantum Theory of Motion: An Account of The de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 17, 27
- 19 AGUIAR, A. L. de. *Amplitude de Correlação - Mecânica Quântica 1 – Aula 2.5*. Youtube. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=W5UY4tULRZA&t=1706s>>. Acesso em: 29/10/2022. 24
- 20 ARFKEN, G.; WEBER, H. H. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 26
- 21 NETO, J. B. *Matemática para Físicos com aplicações: Vetores, Tensores e Spinors*. São Paulo: Livraria da Física, 2010. v. 1. 26
- 22 NETO, J. B. *Matemática para Físicos com aplicações: Tratamentos Clássico e Quântico*. São Paulo: Livraria da Física, 2011. v. 2. 27
- 23 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Mecânica*. São Paulo: Editora Blucher, 2013. v. 1. 28
- 24 NAPOLITANO, R. de J. *Polinômios de Hermite*. Disponível em: <<https://www.ifsc.usp.br/~reginaldo/deep/fisica-matematica-2022/aula-18.pdf>>. Acesso em: 11/12/2022. 28
- 25 COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum Mechanics, Volume 3: Fermions, Bosons, Photons, Correlations, and Entanglement*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2019. 32
- 26 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Eletromagnetismo (vol. 3)*. São Paulo: Editora Blucher, 2006. v. 3. 33

# APÊNDICE A – Potencial Quântico do OHS

## A.1 Para $n = 0$ :

Para  $n = 0$  o polinômio de Hermite é apenas:

$$H_0 = 1 \quad (\text{A.1.1})$$

O que implica na seguinte Função de Onda  $\Psi_0(\mathbf{q}_i, t)$ :

$$\Psi_0(\mathbf{q}_i, t) = \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\mathbf{q}_i^2\right] \exp\left[-\frac{Eit}{\hbar}\right] \quad (\text{A.1.2})$$

Utilizando a equação (3.3.3), tem-se a Amplitude da Onda:

$$R_0 = \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\mathbf{q}_i^2\right] \quad (\text{A.1.3})$$

E seu laplaciano:

$$\nabla^2 R_0 = \left[\left(\frac{m\omega\mathbf{q}_i}{\hbar}\right)^2 - \frac{m\omega}{\hbar}\right] \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\mathbf{q}_i^2\right] \quad (\text{A.1.4})$$

O que resulta no Potencial Quântico, ao utilizar a equação (3.3.12):

$$Q_0 = -\frac{m\omega^2\mathbf{q}_i^2}{2} + \frac{\hbar\omega}{2} \quad (\text{A.1.5})$$

## A.2 Para $n = 1$ :

Já para  $n = 1$ , tem-se o seguinte polinômio de Hermite:

$$H_1 = 2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} \mathbf{q}_i \quad (\text{A.2.1})$$

Já a função  $\Psi_1(\mathbf{q}_i, t)$  é:

$$\Psi_1(\mathbf{q}_i, t) = 2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} \mathbf{q}_i \cdot \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\mathbf{q}_i^2\right] \exp\left[-\frac{Eit}{\hbar}\right] \quad (\text{A.2.2})$$

Realizando as mesmas operações do item anterior, a amplitude  $R_1$  é:

$$R_1 = 2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} \mathbf{q}_i \cdot \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\mathbf{q}_i^2\right] \quad (\text{A.2.3})$$

Seu laplaciano:

$$\nabla^2 R_1 = 2 \left( \frac{m\omega \mathbf{q}_i}{\hbar} - 3 \right) \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^{3/2} \mathbf{q}_i \cdot \exp \left[ -\frac{m\omega}{2\hbar} \mathbf{q}_i^2 \right] \quad (\text{A.2.4})$$

O potencial quântico para  $n = 1$ :

$$Q_1 = -\frac{m\omega^2 \mathbf{q}_i^2}{2} + \frac{3}{2} \hbar \omega \quad (\text{A.2.5})$$

### A.3 Para $n = 2$ :

Agora para  $n = 2$ :

$$H_2 = 4 \frac{m\omega}{\hbar} \mathbf{q}_i^2 - 2 \quad (\text{A.3.1})$$

A função  $\Psi_2(\mathbf{q}_i, t)$ :

$$\Psi_2(\mathbf{q}_i, t) = \left( 4 \frac{m\omega}{\hbar} \mathbf{q}_i^2 - 2 \right) \exp \left[ -\frac{m\omega}{2\hbar} \mathbf{q}_i^2 \right] \exp \left[ -\frac{Eit}{\hbar} \right] \quad (\text{A.3.2})$$

Sua amplitude  $R_2$  e laplaciano:

$$R_2 = \left( 4 \frac{m\omega}{\hbar} \mathbf{q}_i^2 - 2 \right) \exp \left[ -\frac{m\omega}{2\hbar} \mathbf{q}_i^2 \right] \quad (\text{A.3.3})$$

$$\nabla R_2 = \left[ 10 \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right) - 22 \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 \mathbf{q}_i^2 + 4 \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^3 \mathbf{q}_i^4 \right] \exp \left[ -\frac{m\omega}{2\hbar} \mathbf{q}_i^2 \right] \quad (\text{A.3.4})$$

Resultando no potencial quântico:

$$Q_2 = -\frac{m\omega^2 \mathbf{q}_i^2}{2} + \frac{5}{2} \hbar \omega \quad (\text{A.3.5})$$

### A.4 Potencial Quântico para qualquer $n$

Nota-se pelas equações (A.1.5), (A.2.5) e (A.3.5) que há um padrão em como elas são formadas, o primeiro termo após o sinal de igualdade são sempre idênticos, a diferença está no segundo que termo, apesar de todos possuírem as constantes  $\hbar\omega$ , há uma diferença no crescimento do termo acompanhante da ordem de  $n + 1/2$  com  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , crescente de acordo o  $n$  do polinômio de Hermite  $H_n$ , a equação (4.1.9). Portanto, tem-se que o potencial quântico para o sistema do oscilador harmônico simples é a seguinte equação (4.1.12):

$$Q_n = -\frac{m\omega^2 \mathbf{q}_i^2}{2} + \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (\text{A.4.1})$$

Para exemplificar, em níveis mais altos, basta usar a equação anterior (A.4.1), então tem-se o seguinte potencial quântico para  $n = 3$ :

$$Q_3 = -\frac{m\omega^2 \mathbf{q}_i^2}{2} + \frac{7}{2}\hbar\omega \quad (\text{A.4.2})$$

Também, para  $n = 4$ :

$$Q_4 = -\frac{m\omega^2 \mathbf{q}_i^2}{2} + \frac{9}{2}\hbar\omega \quad (\text{A.4.3})$$

E assim por diante. Obviamente, esses resultados, (A.4.2) e (A.4.3), podem também ser encontrados se calcularmos a partir do polinômio de Hermite certo para cada caso.