



UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DAS TECNOLOGIAS  
CURSO DE BACHARELADO EM FÍSICA

Rafael Ramos Marques

# **Estudo do comportamento do campo magnético uniforme em um corpo cilíndrico oco feito de material permeável.**

Barreiras, Bahia  
31 de julho de 2025

Rafael Ramos Marques

# **Estudo do comportamento do campo magnético uniforme em um corpo cilíndrico oco feito de material permeável.**

Monografia apresentada ao curso de bacharelado em Física, como requisito para a aprovação na componente curricular CET0318-Trabalho de Conclusão de Curso III e obtenção do título de bacharel em Física pelo Centro de Ciências Exatas e das Tecnologias da Universidade Federal do Oeste da Bahia

Universidade Federal do Oeste da Bahia  
Centro de Ciências Exatas e das Tecnologias  
Curso de Bacharelado em Física

Orientador: Edward Ferraz de Almeida Junior

Barreiras, Bahia  
31 de julho de 2025

## FICHA CATALOGRÁFICA

---

M357 Marques, Rafael Ramos.

Estudo do comportamento do campo magnético uniforme em um corpo cilíndrico oco feito de material permeável. / Rafael Ramos Marques. – 2025.

40f.

Orientador: Prof. Dr. Edward Ferraz Almeida Júnior.

Monografia (Graduação) – Bacharelado em Física. Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias. Barreiras, BA, 2025.

1. Equações de Maxwell; 2. Magnetismo; 3. Blindagem magnética. I. Almeida Júnior, Edward Ferraz. II. Universidade Federal do Oeste da Bahia - Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias. III. Título.

CDD 530

---

**Biblioteca Universitária de Barreiras - UFOB**

Rafael Ramos Marques

# Estudo do comportamento do campo magnético uniforme em um corpo cilíndrico oco feito de material permeável.

Monografia apresentada ao curso de bacharelado em Física, como requisito para a aprovação na componente curricular CET0318-Trabalho de Conclusão de Curso III e obtenção do título de bacharel em Física pelo Centro de Ciências Exatas e das Tecnologias da Universidade Federal do Oeste da Bahia

Trabalho aprovado. Barreiras, Bahia, 31 de julho de 2025.



Assinado de forma digital por  
Edward Ferraz de Almeida  
Junior:01692487558  
Dados: 2025.08.01 17:28:34 -03'00'

---

**Edward Ferraz de Almeida Junior**

Orientador

Documento assinado digitalmente



**MURILO SODRE MARQUES**

Data: 01/08/2025 17:14:50-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Murilo Sodré Marques**

Convidado 1

Documento assinado digitalmente



**JONATAN JOAO DA SILVA**

Data: 01/08/2025 16:46:42-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Jonatan João da Silva**

Convidado 2

Barreiras, Bahia  
31 de julho de 2025

# Resumo

Este trabalho investiga o comportamento do campo magnético uniforme  $\vec{B}$  quando aplicado em um cilindro oco de material permeável. O estudo parte do desenvolvimento histórico do magnetismo e da formulação teórica que descreve os campos elétrico e magnético, culminando na compreensão das interações entre esses campos e os materiais utilizados para sua contenção. A blindagem magnética é um fenômeno crucial com aplicações em diversas áreas da ciência e tecnologia, sendo empregada na proteção de equipamentos sensíveis à interferência de campos magnéticos. Ao longo do trabalho, são abordados os princípios físicos envolvidos na atenuação de campos magnéticos, bem como as propriedades dos materiais utilizados para esse fim.

**Palavras-chave:** Equações de Maxwell, magnetismo, blindagem magnética.

# Sumário

|     |                                                                             |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| 1   | INTRODUÇÃO . . . . .                                                        | 6  |
| 2   | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .                                             | 7  |
| 2.1 | Lei de Biot-Savart para correntes estacionárias . . . . .                   | 7  |
| 2.2 | Lei de Gauss do magnetismo . . . . .                                        | 9  |
| 2.3 | Lei de Ampère . . . . .                                                     | 10 |
| 2.4 | Potencial Escalar Magnético . . . . .                                       | 12 |
| 2.5 | Potencial Vetor Magnético . . . . .                                         | 13 |
| 2.6 | Campos magnéticos na matéria . . . . .                                      | 15 |
| 2.7 | Problemas de contorno em meios materiais . . . . .                          | 21 |
| 3   | CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO NO INTERIOR DE UMA<br>CASCA CILÍNDRICA . . . . . | 24 |
| 4   | RESULTADOS . . . . .                                                        | 36 |
| 5   | CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .                                              | 38 |
|     | REFERÊNCIAS . . . . .                                                       | 39 |

# 1 Introdução

O magnetismo é um fenômeno natural conhecido desde a Antiguidade, quando civilizações antigas observavam o comportamento de certos minerais, como a magnetita, que apresentavam a capacidade de atrair metais. Com o passar dos séculos, o entendimento sobre os fenômenos magnéticos evoluiu consideravelmente. No século XVII, William Gilbert foi um dos primeiros a estudar sistematicamente o magnetismo, propondo que a Terra funcionava como um grande ímã ([JACKSON, 1983](#)). No século XIX, Hans Christian Oersted descobriu a relação entre eletricidade e magnetismo, abrindo caminho para os trabalhos de Michael Faraday e, posteriormente, para as equações de James Clerk Maxwell, que consolidaram a teoria do eletromagnetismo clássico ([PIRES, 2011](#)).

A compreensão dos fenômenos eletromagnéticos foi fundamental para o avanço da ciência e da tecnologia. Atualmente, o magnetismo está presente em praticamente todos os setores da sociedade, sendo essencial para o funcionamento de motores elétricos, transformadores, geradores, sistemas de comunicação, sensores, instrumentos científicos e equipamentos médicos, como a ressonância magnética. No entanto, em muitos desses contextos, campos magnéticos indesejados podem causar interferências e comprometer o desempenho e a precisão de dispositivos sensíveis.

É nesse cenário que a blindagem magnética se torna indispensável. Trata-se de uma técnica que utiliza materiais de alta permeabilidade magnética para redirecionar ou atenuar campos magnéticos, protegendo regiões específicas ou componentes críticos de interferências externas. Suas aplicações são amplas e vão desde laboratórios de pesquisa até instalações hospitalares, passando por indústrias de alta tecnologia e sistemas aeroespaciais. Neste trabalho, serão explorados os fundamentos teóricos que descrevem os fenômenos eletromagnéticos, com base nas equações de Maxwell, e será proposta a resolução de um problema prático envolvendo a aplicação da blindagem magnética.

## 2 Fundamentação Teórica

### 2.1 Lei de Biot-Savart para correntes estacionárias

A descoberta da relação entre eletricidade e magnetismo teve um marco importante com o experimento de Hans Christian Oersted, que observou que uma corrente elétrica percorrendo um fio condutor era capaz de influenciar a agulha de uma bússola próxima. Essa observação levou à conclusão de que correntes elétricas geram, ao seu redor, campos magnéticos (MACHADO, 2002). A partir dessas evidências experimentais, os físicos Jean-Baptiste Biot e Félix Savart desenvolveram uma formulação matemática capaz de descrever quantitativamente o campo magnético gerado por uma corrente elétrica em um condutor. Essa formulação ficou conhecida como Lei de Biot-Savart. A seguir, serão apresentadas as suposições e os passos teóricos que conduzem à construção dessa importante lei do eletromagnetismo.

Devemos encontrar o campo magnético em um ponto do espaço gerado pela corrente  $i$  que passa por um elemento  $d\ell$  do fio.

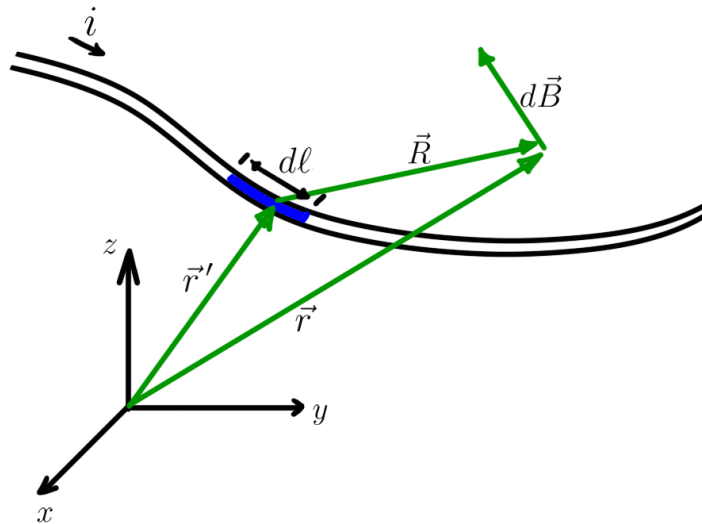


Figura 1 – Campo magnético  $d\vec{B}$  gerado pela corrente  $i$  que passa pelo elemento  $d\ell$ .

Fonte: Rafael Ramos Marques (2025)

Os resultados experimentais indicam que a intensidade do campo magnético gerado por um fio condutor é diretamente proporcional à corrente elétrica  $i$  que o percorre e ao elemento de comprimento  $d\ell$  do fio considerado. Além disso, essa intensidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância  $R$  entre o ponto onde se deseja calcular o campo e o elemento de corrente.

A direção e o sentido do campo magnético podem ser determinados pela regra da mão direita, que, do ponto de vista matemático, corresponde ao produto vetorial entre os vetores envolvidos, representado da seguinte forma:

$$d\hat{B} = d\hat{\ell} \times \hat{R}.$$

Até então a lei de Biot-Savart pode ser escrita da seguinte forma:

$$d\vec{B} = C \frac{i \cdot d\ell}{R^2} \hat{\ell} \times \hat{R},$$

onde  $C$  é uma constante de proporcionalidade que no SI tem o seguinte valor

$$C = \frac{\mu_0}{4\pi},$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo e seu valor é

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2,$$

de forma que a lei pode ser escrita como

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi R^2} d\vec{\ell} \times \hat{R}. \quad (2.1)$$

Integrando os dois lados da equação 2.1 e considerando um fio infinito, o módulo do campo magnético  $\vec{B}$  próximo ao fio será dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{\theta}, \quad (2.2)$$

onde a direção e sentido do campo  $\vec{B}$  são dadas pela regra da mão direita. Nesse caso, devido a geometria do problema, foi considerado o uso de coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$  com a corrente  $i$  no sentido do eixo  $z$ .

Para o caso onde existe uma densidade de corrente  $\vec{J}$  percorrendo um volume  $V$  podemos considerar que

$$\vec{J} = \frac{i}{A} d\hat{\ell} \rightarrow \vec{J} A d\ell = i d\ell d\hat{\ell} \quad \therefore \quad \vec{J} dV = i d\vec{\ell}.$$

Com isso se torna importante reescrever a lei de Biot-Savart da seguinte forma:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \hat{R}}{R^2} dV. \quad (2.3)$$

Para obter o campo  $\vec{B}$  basta integrar a equação 2.3 em relação ao volume  $V$ .

## 2.2 Lei de Gauss do magnetismo

A inexistência de monopolos magnéticos implica que as linhas de campo magnético são sempre fechadas. Isso significa que toda linha de campo que atravessa uma superfície fechada em um determinado ponto necessariamente sairá dessa superfície em outro ponto. Como consequência, o número de linhas que entram é igual ao número de linhas que saem, o que nos permite concluir que o fluxo total do campo magnético através de uma superfície fechada é sempre nulo (MACHADO, 2002).

A ilustração a seguir representa visualmente esse comportamento do campo magnético em relação a uma superfície fechada.

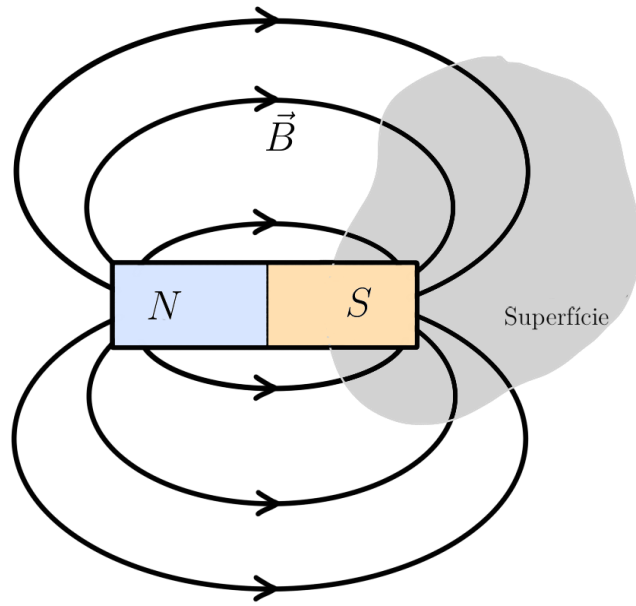


Figura 2 – Superfície gaussiana sendo atravessada por linhas de campo.

Fonte: Rafael Ramos Marques (2025)

Aplicando a integral de superfície para o campo magnético  $\vec{B}$ , teremos a lei de Gauss para o magnetismo em sua forma integral.

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0. \quad (2.4)$$

No entanto, é igualmente importante expressá-la em sua forma diferencial, que oferece uma interpretação local do comportamento do campo magnético. Como a superfície  $S$  envolve um volume  $V$  podemos aplicar o Teorema da Divergência, que estabelece a equivalência entre o fluxo de um campo vetorial através da superfície que delimita um volume e a integral da divergência desse campo dentro do volume:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV.$$

Dessa forma,

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV = 0.$$

Como essa igualdade deve valer para qualquer volume arbitrário  $V$  a única forma de garantir isso é que o integrando seja nulo em todos os pontos do espaço. Assim, chegamos à forma diferencial da Lei de Gauss para o magnetismo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.5)$$

## 2.3 Lei de Ampère

A figura 3 mostra que o campo magnético em um fio retilíneo infinito tem formato de circunferências, isso sugere que o rotacional do campo magnético  $\vec{B}$  não deve ser nulo.

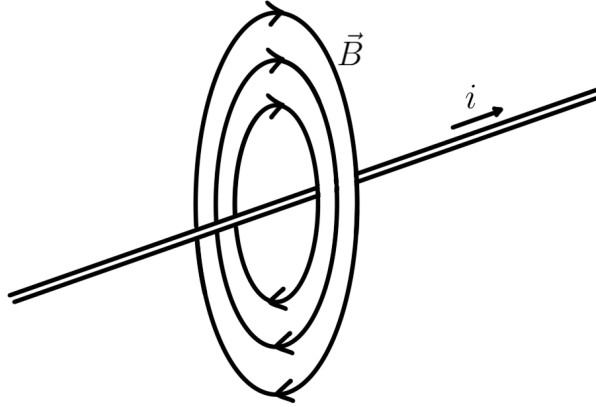


Figura 3 – Campo magnético no fio retilíneo.

Fonte: Rafael Ramos Marques (2025)

Vamos usar a relação 2.2 e integrar  $\vec{B}$  em torno de um caminho circular de raio  $R$  centrado no fio.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{\theta} \cdot d\vec{\ell}.$$

Como  $d\vec{\ell}$  é um elemento da circunferência descrita pelo campo  $\vec{B}$ , em coordenadas cilíndricas, podemos fazer  $d\vec{\ell} = R d\theta \hat{\theta}$ . Dessa forma

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{\theta} \cdot R d\theta \hat{\theta},$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint_C d\theta,$$

onde finalmente chegamos no seguinte resultado:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i, \quad (2.6)$$

que é a Lei de Ampère na forma integral. A equação 2.6 é válida para qualquer curva  $C$  fechada em torno de um fio e independe do formato das linhas de campo magnético que envolve a corrente  $i$  (MACHADO, 2002), desde que estejamos tratando de correntes estacionárias.

Outro resultado importante é a Lei de Ampère na forma diferencial. Devemos inicialmente escrever a corrente  $i$  em função da densidade superficial de corrente. Um elemento de corrente  $di$  pode ser dado por  $di = \vec{J} \cdot d\vec{A}$ . Como o sentido da corrente é perpendicular à área  $A$ , podemos definir um vetor  $\vec{J}$  que passa pela área  $A$  e tem um valor máximo quando é paralelo ao versor normal à área:

$$di = \vec{J} \cdot \hat{n} dA.$$

A corrente total será

$$i = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA. \quad (2.7)$$

Substituindo esse resultado na 2.6, temos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA.$$

De um lado temos uma integral de caminho fechado e do outro temos uma integral de superfície. Podemos relacionar as integrais usando o Teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dA.$$

Dessa forma, teremos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA.$$

Então

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA,$$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA - \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA = 0,$$

$$\int_S [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \mu_0 \vec{J}] \cdot \hat{n} dA = 0.$$

O resultado acima só pode ser possível quando o integrando for nulo. Dessa forma:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \mu_0 \vec{J} = 0$$

Finalmente, a lei de Ampère na forma diferencial pode ser escrita como

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (2.8)$$

## 2.4 Potencial Escalar Magnético

A Lei de de Ampère na sua forma diferencial (equação 2.8) mostra que o rotacional do campo magnético  $\vec{B}$  deve ser nulo na ausência de correntes, nesse caso devemos ter  $\vec{J} = 0$  e consequentemente a equação 2.8 pode ser reescrita como

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0.$$

Quando o rotacional de um campo vetorial é nulo, podemos escrever esse campo vetorial a partir do gradiente de uma função escalar (REITZ; CHRISTY, 1982). Dessa forma podemos ter

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} \phi \quad (2.9)$$

Aplicando a equação 2.5 nos dois lados da equação acima,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (-\mu_0 \vec{\nabla} \phi) = 0,$$

segue que

$$\vec{\nabla} \cdot (-\mu_0 \vec{\nabla} \phi) = -\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0.$$

Finalmente,

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.10)$$

Nas relações acima,  $\phi$  é o potencial escalar magnético e, na ausência de correntes e de variações de fluxos elétricos, ele obedece a equação de Laplace.

## 2.5 Potencial Vetor Magnético

Pela lei de Gauss 2.4, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Dada a validade geral da lei, e como  $\vec{B}$  se trata de um campo vetorial e o seu divergente é nulo, podemos escrever o vetor  $\vec{B}$  em termos de um rotacional, pois o divergente do rotacional deve ser nulo. Dessa forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}).$$

Comparando os dois lados da igualdade acima, temos

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.11)$$

$\vec{A}$  é conhecido como potencial vetor magnético. Partindo da lei de Biot-Savart é possível obter uma relação matemática para o potencial vetor magnético.

Partindo da equação 2.3 temos

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \hat{R}}{R^2} dV.$$

Usando a relação

$$\frac{\hat{R}}{R^2} = -\vec{\nabla} \left[ \frac{1}{R} \right],$$

Chegaremos a:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J} \times \vec{\nabla} \left[ \frac{1}{R} \right] dV.$$

Do cálculo vetorial temos

$$\vec{\nabla} \times (\Phi \vec{A}) = (\vec{\nabla} \Phi) \times \vec{A} + \Phi (\vec{\nabla} \times \vec{A}).$$

Fazendo

$$\Phi \vec{A} = \frac{1}{R} \vec{J},$$

temos

$$\vec{\nabla} \times \left[ \frac{\vec{J}}{R} \right] = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{R} \right) \times \vec{J} + \frac{1}{R} \vec{\nabla} \times \vec{J}.$$

O operador  $\vec{\nabla}$  atua apenas nas coordenadas que dependem de  $r$  e não de  $r'$ . Como  $\vec{J} = \vec{J}(r')$ , o último termo se anula. Ficando apenas

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{J}}{R} \right) = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{R} \right) \times \vec{J}.$$

Invertendo o produto vetorial do lado direito da equação acima, teremos

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{J}}{R} \right) = -\vec{J} \times \vec{\nabla} \left( \frac{1}{R} \right)$$

Dessa forma,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{J}}{R} \right) dV.$$

O operador diferencial, nabla, pode sair da integral por estar atuando apenas nas coordenadas sem linha. Finalmente, podemos fazer

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{R} dV \right). \quad (2.12)$$

Comparando as equações 2.11 e 2.12, podemos concluir que

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{R} dV. \quad (2.13)$$

## 2.6 Campos magnéticos na matéria

Toda matéria é feita de átomos, e cada átomo é formado por elétrons que estão sempre em movimento. Esses elétrons giram em torno do núcleo do próprio átomo, formando o que podemos chamar de "correntes atômicas".

Com isso, podemos pensar em dois tipos de corrente: (1) a corrente elétrica comum, que é o movimento de elétrons livres (ou íons) através de um fio, por exemplo, transportando carga e (2) as correntes atômicas, que ocorrem dentro dos átomos, em trajetórias fechadas, mas que não transportam carga de um ponto a outro — apenas giram em torno do núcleo (REITZ; CHRISTY, 1982). Mesmo sendo diferentes, ambos os tipos de corrente são capazes de gerar campos magnéticos.

As correntes atômicas formam pequenos circuitos fechados dentro dos átomos e, por isso, podem ser representadas como dipolos magnéticos. O que realmente importa nesse contexto é o chamado momento de dipolo magnético, pois é ele que determina o campo magnético gerado por um único átomo a certa distância.

A figura a seguir representa o movimento de um único elétron orbitando um núcleo atômico. A partir desse modelo simplificado iremos definir o momento de dipolo magnético e a magnetização.

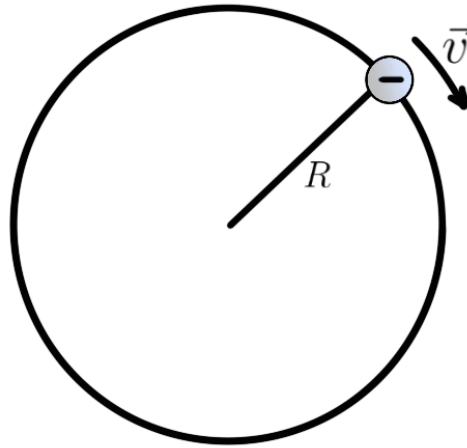


Figura 4 – Representação de um elétron orbitando um núcleo atômico.

Fonte: Rafael Ramos Marques (2025)

A corrente atômica gerada pelo elétron orbitando o núcleo cria um campo magnético induzido  $\vec{B}_i$ . Isso ocorre de forma análoga à corrente elétrica em uma espira de raio  $R$ . Resolvendo a lei de Biot-Savart para uma espira de raio  $R$ , obtemos que o campo magnético ao longo do seu eixo de simetria perpendicular ao plano da espira é dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3} \hat{k} = \frac{\mu_0 i \pi R^2}{2\pi z^3} \hat{k}, \quad (2.14)$$

assim o momento de dipolo magnético induzido é definido como

$$\vec{m} = i\pi R^2 \hat{k}. \quad (2.15)$$

Através da equação 2.1, é possível mostrar que o momento de dipolo magnético tem a mesma direção e sentido do campo magnético induzido pela corrente atômica. Escolhendo as coordenadas cilíndricas, que é apropriada à geometria do problema, o versor  $\hat{k}$  tem direção e sentido do eixo  $z$ .

Agora vamos analisar o que acontece na matéria quando a mesma se encontra em uma região do espaço com um campo magnético  $\vec{B}$ .

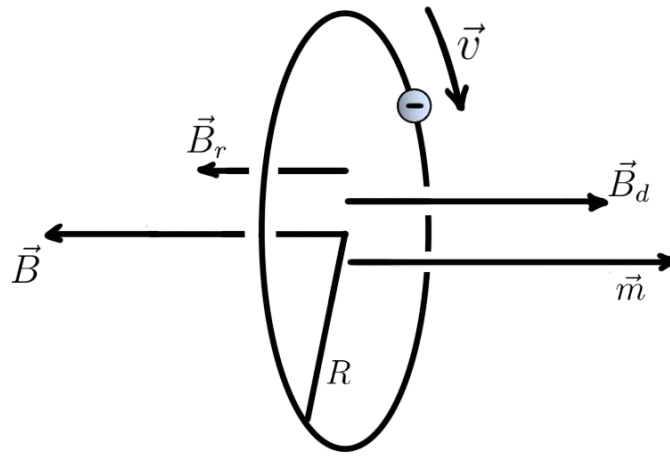


Figura 5 – Elétron orbitando um núcleo imerso em um campo magnético  $\vec{B}$ .

Fonte: Rafael Ramos Marques (2025)

Na figura acima,  $\vec{B}_d$  é o campo magnético de dipolo induzido, sendo criado pelo movimento do elétron em torno do núcleo que foi fortalecido pela ação do campo externo  $\vec{B}$ . Sua direção e sentido ficam definidos pela regra da mão direita.  $\vec{B}$  é o campo externo aplicado ao sistema e  $\vec{B}_r$  é o campo magnético resultante da superposição dos campos  $\vec{B}_d$  e  $\vec{B}$ . Como o campo magnético de dipolo induzido e o campo externo são opostos, o campo resultante tem uma intensidade menor do que o campo magnético externo. Vale lembrar que  $\vec{m}$  é o momento de dipolo magnético, que tem a mesma direção e sentido do campo magnético induzido.

Como a matéria é composta por vários átomos, ou seja, vários elétrons orbitam o núcleo gerando a corrente atômica, torna-se importante escolher um pequeno volume  $\Delta V$  da matéria para definir outra grandeza física chamada de magnetização (REITZ; CHRISTY, 1982). A magnetização deverá medir a densidade do momento de dipolo magnético da seguinte forma

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{m}_i. \quad (2.16)$$

O volume  $\Delta V$  deve ser muito pequeno do ponto de vista macroscópico, mas não tão pequeno do ponto de vista microscópico, pois é importante que dentro desse volume exista uma quantidade suficientemente grande de átomos. Pela figura 7, podemos obter a seguinte relação entre os campos magnéticos

$$\vec{B}_r = \vec{B} + \vec{B}_d.$$

Associando cada campo magnético a um potencial vetor magnético, teremos

$$\vec{A}_r = \vec{A} + \vec{A}_d.$$

Da equação 2.13 podemos concluir que  $\vec{A}$  é devido a uma densidade de corrente no material e  $\vec{A}_d$  é devido à corrente atômica, que por sua vez tem uma relação com o momento de dipolo magnético  $\vec{m}$ .

Desenvolvendo a equação 2.12, é possível obter para um dipolo magnético:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3}.$$

Da equação 2.16 podemos escrever  $\vec{m} = \vec{M}\Delta V$ , dessa forma:

$$\Delta \vec{A}_d = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M}\Delta V \times \vec{R}}{R^3}.$$

O potencial vetor magnético, de forma completa, fica:

$$\vec{A}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{R} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M} dV \times \vec{R}}{R^3},$$

$$\vec{A}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left( \frac{\vec{J}}{R} + \frac{\vec{M} \times \vec{R}}{R^3} \right) dV.$$

Como  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  e  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ , podemos usar o operador diferencial  $\nabla$  da seguinte forma

$$\vec{\nabla} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = - \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)$$

e

$$\vec{\nabla} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\vec{\nabla}' \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

Então,

$$\vec{\nabla}' \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

O potencial vetor magnético fica

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \frac{\vec{J}}{R} + \vec{M} \times \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{R} \right) \right] dV.$$

Usando a identidade:  $\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}) = (\vec{\nabla} \phi) \times \vec{A} + \phi (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ , temos

$$\vec{\nabla}' \times \left( \frac{\vec{M}}{R} \right) = \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{R} \right) \times \vec{M} + \frac{1}{R} (\vec{\nabla}' \times \vec{M}) = -\vec{M} \times \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} (\vec{\nabla}' \times \vec{M}).$$

Então

$$\vec{M} \times \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R} (\vec{\nabla}' \times \vec{M}) - \vec{\nabla}' \times \left( \frac{\vec{M}}{R} \right).$$

Dessa forma o potencial vetor magnético será

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \frac{\vec{J}}{R} + \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}}{R} - \vec{\nabla}' \times \left( \frac{\vec{M}}{R} \right) \right] dV.$$

Ou

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{R} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}}{R} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla}' \times \left( \frac{\vec{M}}{R} \right) dV.$$

Para a terceira integral, podemos aplicar a identidade

$$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{D} dV = \oint_S \hat{n} \times \vec{D} dA.$$

Dessa forma devemos ter

$$\int_V \vec{\nabla}' \times \left( \frac{\vec{M}}{R} \right) dV = \oint_S \hat{n} \times \left( \frac{\vec{M}}{R} \right) dA = - \oint_S \frac{\vec{M} \times \hat{n}}{R} dA.$$

Substituindo na expressão do potencial vetor magnético

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{R} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}}{R} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M} \times \hat{n}}{R} dA. \quad (2.17)$$

Para que a expressão acima seja homogênea, as relações  $\vec{\nabla}' \times \vec{M}$  e  $\vec{M} \times \hat{n}$  devem ter dimensão de densidade de corrente. A primeira é a corrente de magnetização volumétrica ( $\vec{J}_M$ ) e a segunda é a corrente de magnetização superficial ( $\vec{J}_S$ ).

Considerando uma superfície hipotética de volume finito, mas com área infinita a terceira integral deve ir a zero (MACHADO, 2002), de forma que

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} + \vec{\nabla}' \times \vec{M}}{R} dV.$$

Comparando com a 2.12, podemos concluir que o termo  $\vec{J} + \vec{\nabla}' \times \vec{M}$  equivale a uma densidade de corrente efetiva. O problema pode ser analisado como se a densidade de corrente que passa pelo material fosse  $\vec{J} + \vec{J}_M$ . Dessa forma podemos usar a lei de Ampère na forma diferencial 2.8 para calcular o campo magnético produzido em um meio magnético:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{M}).$$

Simplificando, podemos fazer

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}.$$

O termo entre parenteses é definido como campo auxiliar  $\vec{H}$ , de forma que

$$\vec{H} = \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right). \quad (2.18)$$

Para meios magnéticos podemos reescrever a lei de Ampère da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}. \quad (2.19)$$

No vácuo devemos ter  $\vec{M} = 0$ , de forma que

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

Onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo. Analogamente podemos escolher um meio material com permeabilidade magnética  $\mu$  podendo escrever

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}. \quad (2.20)$$

Na forma integral a equação 2.19 fica

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i. \quad (2.21)$$

Onde  $i$  é a corrente real que existe no meio material.

A equação 2.20 mostra uma relação linear entre os campos magnético e auxiliar. Usando as equações 2.18 e 2.20, podemos escrever que

$$\vec{H} = \frac{\mu}{\mu_0} \vec{H} - \vec{M}.$$

Dessa forma a magnetização  $\vec{M}$  também deve ter uma relação linear com o campo auxiliar  $\vec{H}$  (REITZ; CHRISTY, 1982). De forma que podemos escrever

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}.$$

Onde  $\chi_m$  é chamado de susceptibilidade magnética. Substituindo essa relação na equação anterior, teremos

$$1 = \frac{\mu}{\mu_0} - \chi_m \quad \therefore \quad \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \quad \therefore \quad \chi_m = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}$$

A razão  $\mu/\mu_0$  é denominada permeabilidade magnética relativa  $K_m$ . Se  $\chi_m$  for negativo, o material será diamagnético e o campo magnético se tornará mais fraco devido a presença do material. No caso contrário, onde  $\chi_m$  é positivo, o material será paramagnético e fará com que o campo magnético aumente devido a presença do material.

## 2.7 Problemas de contorno em meios materiais

Para resolvermos o problema proposto, é preciso entender como os campos  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  se comportam na interface entre dois meios materiais ou entre um meio material e o vácuo. Na figura abaixo, entre os meios 1 e 2, foi construída uma superfície cilíndrica fechada onde devemos aplicar a lei de Gauss na forma 2.4 para calcular o fluxo do campo magnético em todas as faces.

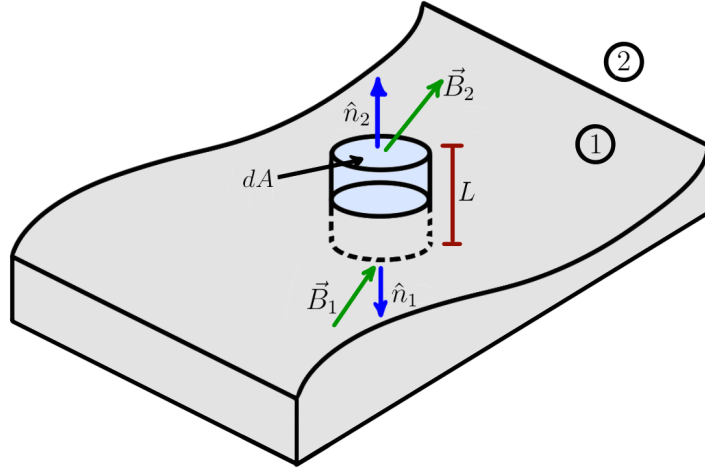


Figura 6 – Superfície gaussiana cilíndrica entre dois meios.

Fonte: Rafael Ramos Marques (2025)

Considerando o comprimento  $L$  muito pequeno de forma que o tamanho da caixa se torne desprezível em relação à sua base, podemos aplicar a 2.4 apenas para a base superior e inferior de forma que teremos

$$\oint_s \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_1 dA_1 + \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 dA_2 = 0.$$

Pela figura, podemos perceber que  $dA_1 = dA_2$  e  $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$ . Substituindo essas relações na equação acima, temos

$$-\int_S \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2 dA + \int_S \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 dA = 0,$$

$$\int_S (-\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2 + \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2) dA = 0,$$

Dessa forma,

$$-\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2 + \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 = 0,$$

Onde finalmente

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2 = \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2. \quad (2.22)$$

Assim forma a componente normal do campo magnético  $\vec{B}$  será contínua na superfície  $S$  entre os dois meios magnéticos.

Podemos também obter uma condição de contorno para o campo auxiliar  $\vec{H}$  usando a lei de Ampère na forma 2.21. Basta agora considerarmos uma curva fechada na superfície entre os meios 1 e 2.

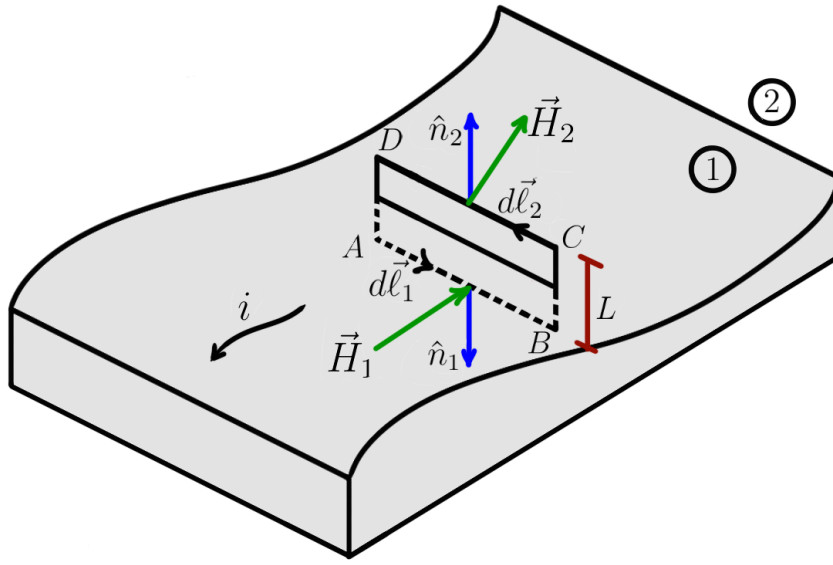


Figura 7 – Superfície gaussiana cilíndrica entre dois meios.

Fonte: Rafael Ramos Marques (2025)

Considerando o comprimento  $L$  muito pequeno, de forma que os segmentos  $AD$  e  $BC$  sejam desprezíveis em relação aos segmentos  $AB$  e  $CD$ , aplicando a 2.21, teremos

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{H}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + \int_C^D \vec{H}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 = i.$$

Como  $\vec{H}_1$  e  $\vec{H}_2$  devem ser constantes,

$$\vec{H}_1 \cdot \int_A^B d\vec{\ell}_1 + \vec{H}_2 \cdot \int_C^D d\vec{\ell}_2 = i,$$

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{\ell}_1 + \vec{H}_2 \cdot \vec{\ell}_2 = i.$$

Pela figura 7, percebemos que  $\ell_1 = -\ell_2$ , logo

$$-\vec{H}_1 \cdot \vec{\ell}_2 + \vec{H}_2 \cdot \vec{\ell}_2 = i \quad \Rightarrow \quad (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \vec{\ell}_2 = i$$

Podemos tratar a corrente  $i$  em termos de uma densidade de corrente e aplicar a equação 2.7 (MACHADO, 2002). Por definição, a densidade de corrente é definida como corrente sobre área ou  $i = \vec{J} \cdot \hat{n} dA$ . No caso proposto, a corrente não está atravessando uma área, pois ela se limita apenas à interface entre os dois meios, de forma que a corrente  $i$  está atravessando um segmento de comprimento  $\ell_2$ . Assim, devemos tratar a corrente  $i$  em termos de uma densidade linear de corrente  $\vec{J}_\ell$ .

De forma análoga à equação 2.7, temos

$$i = \int \vec{J}_\ell \cdot \hat{k} d\ell = \vec{J}_\ell \cdot \hat{k} \ell_2.$$

O versor  $\hat{k}$  é normal ao retângulo  $ABCD$  e foi escolhido de modo que a corrente  $i$  esteja no seu sentido positivo. Reunindo os resultados obtidos até agora, teremos:

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \vec{\ell}_2 = \vec{J}_\ell \cdot \hat{k} \ell_2.$$

Pela figura vemos que  $\hat{k} = \hat{n}_2 \times \hat{\ell}$  e  $\hat{n}_2 \perp \hat{\ell}_2$ , de forma que  $\hat{\ell}_2 = \hat{k} \times \hat{n}_2$ . Assim a equação acima pode ser escrita como:

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot (\hat{k} \times \hat{n}_2) \ell_2 = \vec{J}_\ell \cdot \hat{k} \ell_2,$$

Ficando:

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot (\hat{k} \times \hat{n}_2) = \vec{J}_\ell \cdot \hat{k}.$$

A equação acima possui um produto escalar e um produto vetorial. Se tratando, portanto, de um produto misto. Para desenvolvê-lo iremos usar a seguinte identidade

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a}.$$

fazendo  $\vec{H}_2 - \vec{H}_1 = \vec{a}$ ,  $\hat{k} = \vec{b}$  e  $\hat{n}_2 = \vec{c}$ :

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot (\hat{k} \times \hat{n}_2) = \hat{k} \cdot \hat{n}_2 \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)$$

dessa forma

$$\hat{k} \cdot \hat{n}_2 \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_\ell \cdot \hat{k}$$

Como o produto escalar é comutativo, comparando os dois lados, devemos ter

$$\hat{n}_2 \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_\ell. \quad (2.23)$$

### 3 Cálculo do campo magnético no interior de uma casca cilíndrica

Agora devemos aplicar todo o conhecimento teórico para encontrar o campo magnético  $\vec{B}_i$  interno a uma casca cilíndrica ou esférica. Nesse trabalho, será feito o uso de uma casca cilíndrica com um material de permeabilidade magnética  $\mu$ , no vácuo, em uma região de campo magnético externo  $\vec{B}$ . A figura abaixo mostra uma casca cilíndrica com seu eixo coincidindo com o eixo  $z$  do sistema de coordenadas.

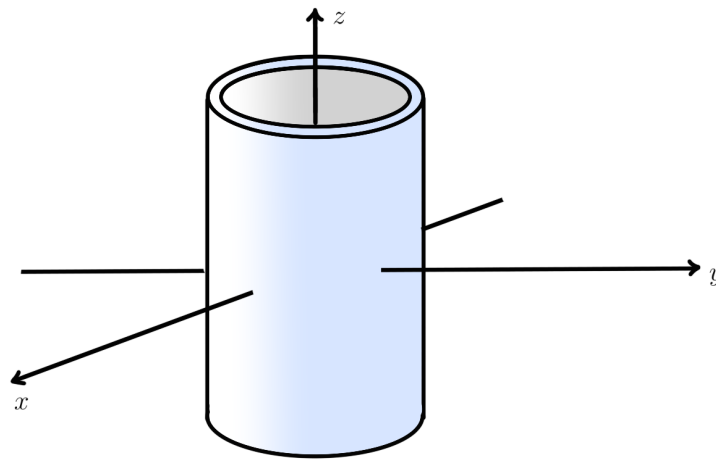


Figura 8 – Casca cilíndrica de material com permeabilidade magnética  $\mu$ .

Fonte: Rafael Ramos Marques (2025)

A casca cilíndrica é infinita no eixo  $z$  e possui raios, interno e externo, iguais a  $a$  e  $b$ , respectivamente. Uma visão superior do problema é mostrada na figura abaixo.

Não existem correntes geradas por elétrons de condução na superfície do cilindro, de forma que a 2.19 se torna

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0. \quad (3.1)$$

Como  $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ , e podemos escrever o campo  $\vec{B}$  com o gradiente de uma função escalar, a equação acima acaba caindo em uma equação de Laplace. Como estamos tratando de uma casca cilíndrica, parece óbvio usar coordenadas cilíndricas para resolver esse problema. A solução completa da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas é

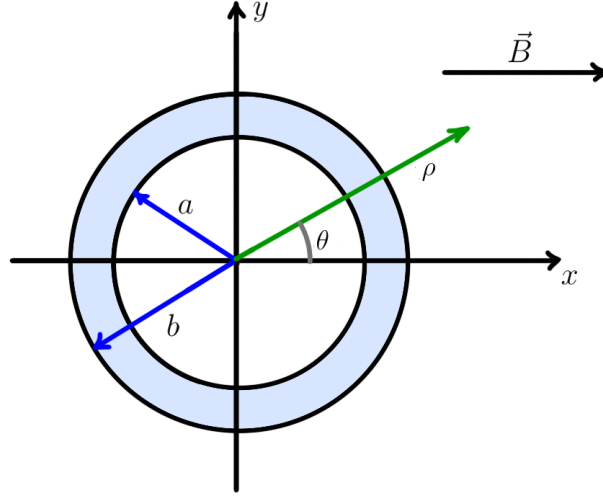


Figura 9 – Visão superior da casca cilíndrica da figura 8.

Fonte: Rafael Ramos Marques (2025)

$$\phi_{0,\nu}(\rho, \theta, z) = (A_0 + B_0 z) \left[ (C_0 + D_0 \theta) \left( E_0 + F_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right) + \sum_{\nu \neq 0} (E_\nu \rho^\nu + F_\nu \rho^{-\nu}) (C_\nu \cos \nu \theta + D_\nu \sin \nu \theta) \right].$$

Uma primeira observação é que a casca é infinita no eixo  $z$ , de forma que o coeficiente  $B_0$  deve ser nulo. Por se tratar de um problema que não tem simetria em relação à origem do sistema de coordenadas, é interessante que sejam consideradas apenas funções pares presentes na solução geral. Dessa forma devemos ter  $D_0 = D_\nu = 0$ . Dessa forma a equação acima fica.

$$\phi_{0,\nu}(\rho, \theta) = A_0 C_0 \left( E_0 + F_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right) + \sum_{\nu \neq 0} (E_\nu \rho^\nu + F_\nu \rho^{-\nu}) (C_\nu \cos \nu \theta) A_0.$$

segue que

$$\phi_{0,\nu}(\rho, \theta) = A_0 C_0 E_0 + A_0 C_0 F_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \sum_{\nu \neq 0} (A_0 C_\nu E_\nu \rho^\nu + A_0 C_\nu F_\nu \rho^{-\nu}) (\cos \nu \theta).$$

Juntando todas as constantes, temos

$$A_0 C_0 E_0 = A'_0,$$

$$A_0 C_0 F_0 = B'_0,$$

$$A_0 C_\nu E_\nu = A'_\nu,$$

$$A_0 C_\nu F_\nu = B'_\nu.$$

ficando

$$\phi_{0,\nu}(\rho, \theta) = A'_0 + B'_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \sum_{\nu \neq 0} (A'_\nu \rho^\nu + B'_\nu \rho^{-\nu}) \cos \nu \theta.$$

Para que a equação acima não fique muito poluída, irei usar a notação de forma mais simplificada.

$$\phi_{0,\nu}(\rho, \theta) = A_0 + B_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \sum_{\nu \neq 0} (A_\nu \rho^\nu + B_\nu \rho^{-\nu}) \cos \nu \theta.$$

Expandindo o somatório temos

$$\phi_{0,\nu}(\rho, \theta) = A_0 + B_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + A_1 \rho^1 \cos \theta + B_1 \rho^{-1} \cos \theta + A_2 \rho^2 \cos \theta + B_2 \rho^{-2} \cos 2\theta + \dots \quad (3.2)$$

Precisamos encontrar o potencial escalar magnético para o campo externo  $\vec{B}$ .

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} \phi \quad \therefore B \hat{i} = -\mu_0 \left( \frac{\partial \phi_B}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi_B}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi_B}{\partial z} \hat{k} \right).$$

Como o campo  $\vec{B}$  está na direção  $x$ , temos

$$B \hat{i} = -\mu_0 \frac{\partial \phi_B}{\partial x} \hat{i} \quad \therefore \frac{-B}{\mu_0} = \frac{\partial \phi_B}{\partial x}.$$

Resolvendo a equação diferencial acima

$$\phi_B = -\frac{B}{\mu_0} x + \phi_0.$$

Em coordenadas cilíndricas  $x = \rho \cos \theta$ . De forma que

$$\phi_B = -\frac{B}{\mu_0} \rho \cos \theta + \phi_0. \quad (3.3)$$

Para uma região externa à casca

$$\phi_f = A_0 + B_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + A_1 \rho^1 \cos \theta + B_1 \rho^{-1} \cos \theta + A_2 \rho^2 \cos \theta + B_2 \rho^{-2} \cos 2\theta + \dots$$

Em uma região externa à casca e muito longe dela, devemos ter  $\phi_B = \phi_f$ , e assim:

$$-\frac{B}{\mu_0} \rho \cos \theta + \phi_0 = A_0 + B_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + A_1 \rho^1 \cos \theta + B_1 \rho^{-1} \cos \theta + A_2 \rho^2 \cos \theta + B_2 \rho^{-2} \cos 2\theta + \dots$$

Comparando os dois lados, temos:

$$A_0 = \phi_0,$$

$$B_0 = 0,$$

$$A_1 = -\frac{B}{\mu_0},$$

$$A_\nu = 0 \quad \forall \nu \geq 2.$$

Os coeficientes  $B_\nu$  não devem ser nulos, pois  $\rho^{-\nu}$  tende a zero para grandes valores de  $\rho$ . O potencial para uma região externa à casca deve ser

$$\phi_f = \phi_0 - \frac{B}{\mu_0} \rho \cos \theta + B_1 \rho^{-1} \cos \theta + B_2 \rho^{-2} \cos 2\theta + \dots \quad (3.4)$$

Aplicando as equações 2.9 e 2.20, conseguiremos calcular os campos  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  na região externa à casca.

Usando  $\vec{\nabla}$  em coordenadas cilíndricas, o campo magnético na região externa será

$$\begin{aligned} \vec{B}_f &= -\mu_0 \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\theta}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \phi_0 - \frac{B}{\mu_0} \rho \cos \theta + B_1 \rho^{-1} \cos \theta + B_2 \rho^{-2} \cos 2\theta + \dots \right) \\ &= -\mu_0 \left[ \left( -\frac{B}{\mu_0} \cos \theta - \frac{B_1}{\rho^2} \cos \theta - \frac{2B_2}{\rho^3} \cos 2\theta + \dots \right) \hat{\rho} + \left( \frac{B}{\mu_0} \sin \theta - \frac{B_1}{\rho^2} \sin \theta - \frac{2B_2}{\rho^3} \sin 2\theta \dots \right) \hat{\theta} \right]. \end{aligned}$$

Na equação anterior

$$\vec{B}_f = \mu_0 \left( \frac{B}{\mu_0} \cos \theta + \frac{B_1}{\rho^2} \cos \theta + \frac{2B_2}{\rho^3} \cos 2\theta + \dots \right) \hat{\rho} - \mu_0 \left( \frac{B}{\mu_0} \sin \theta - \frac{B_1}{\rho^2} \sin \theta - \frac{2B_2}{\rho^3} \sin 2\theta \dots \right) \hat{\theta}. \quad (3.5)$$

O campo auxiliar  $\vec{H}_f$  fica

$$\vec{H}_f = \left( \frac{B}{\mu_0} \cos \theta + \frac{B_1}{\rho^2} \cos \theta + \frac{2B_2}{\rho^3} \cos 2\theta + \dots \right) \hat{\rho} - \left( \frac{B}{\mu_0} \sin \theta - \frac{B_1}{\rho^2} \sin \theta - \frac{2B_2}{\rho^3} \sin 2\theta \dots \right) \hat{\theta}. \quad (3.6)$$

Agora devemos aplicar a equação 3.2 para o interior da casca, quando  $\rho < a$

$$\phi_i = C_0 + D_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + C_1 \rho \cos \theta + D_1 \rho^{-1} \cos \theta + C_2 \rho^2 \cos 2\theta + D_2 \rho^{-2} \cos 2\theta \dots$$

No interior da casca quando  $\rho$  tende a zero, faz o potencial divergir na origem. Como isso não deve ocorrer, os coeficientes  $D_\nu$  devem ser nulos para qualquer valor de  $\nu$ . Assim

$$\phi_i = C_0 + C_1 \rho \cos \theta + C_2 \rho^2 \cos 2\theta + \dots$$

Para obter  $\vec{B}_i$  e  $\vec{H}_i$  devemos aplicar as equações 2.9 e 2.20 na equação acima.

$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= -\mu_0 \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\theta}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (C_0 + C_1 \rho \cos \theta + C_2 \rho^2 \cos 2\theta + \dots) \\ &= -\mu_0 [(C_1 \cos \theta + 2C_2 \rho \cos 2\theta + \dots) \hat{\rho} + (-C_1 \sin \theta - 2C_2 \rho \sin 2\theta + \dots) \hat{\theta}]. \end{aligned}$$

Fazendo a distributiva,

$$\vec{B}_i = -\mu_0 (C_1 \cos \theta + 2C_2\rho \cos 2\theta + \dots) \hat{\rho} + \mu_0 (C_1 \sin \theta + 2C_2\rho \sin 2\theta + \dots) \hat{\theta}. \quad (3.7)$$

O campo auxiliar  $\vec{H}_i$  será:

$$\vec{H}_i = - (C_1 \cos \theta + 2C_2\rho \cos 2\theta + \dots) \hat{\rho} + (C_1 \sin \theta + 2C_2\rho \sin 2\theta + \dots) \hat{\theta}. \quad (3.8)$$

Na região da casca, onde  $a \leq \rho \leq b$ , devemos aplicar a equação 3.2 de forma que não podemos fazer considerações iniciais. Na região da casca, teremos:

$$\phi_C = E_0 + F_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + E_1\rho \cos \theta + F_1\rho^{-1} \cos \theta + E_2\rho^2 \cos 2\theta + F_2\rho^{-2} \cos 2\theta + \dots$$

O campo  $\vec{B}_c$  na casca deve ser

$$\vec{B}_c = -\mu \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\theta}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( E_0 + F_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + E_1\rho \cos \theta + F_1\rho^{-1} \cos \theta + E_2\rho^2 \cos 2\theta + F_2\rho^{-2} \cos 2\theta + \dots \right).$$

Resolvendo as derivadas e fazendo a distributiva do coeficiente  $\mu$ ,

$$\begin{aligned} \vec{B}_c = & -\mu \left( F_0\rho^{-1} + E_1 \cos \theta - F_1\rho^{-2} \cos \theta + 2E_2\rho \cos 2\theta - 2F_2\rho^{-3} \cos 2\theta + \dots \right) \hat{\rho} \\ & + \mu \left( E_1 \sin \theta + F_1\rho^{-2} \sin \theta + 2E_2\rho \sin 2\theta + 2F_2\rho^{-3} \sin 2\theta + \dots \right) \hat{\theta}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

O campo  $\vec{H}_c$  será

$$\begin{aligned} \vec{H}_c = & - \left( F_0\rho^{-1} + E_1 \cos \theta - F_1\rho^{-2} \cos \theta + 2E_2\rho \cos 2\theta - 2F_2\rho^{-3} \cos 2\theta + \dots \right) \hat{\rho} \\ & + \left( E_1 \sin \theta + F_1\rho^{-2} \sin \theta + 2E_2\rho \sin 2\theta + 2F_2\rho^{-3} \sin 2\theta + \dots \right) \hat{\theta}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nosso objetivo agora deve ser encontrar os coeficientes  $C_\nu$  da equação 3.7, pois estamos interessados em saber como o campo magnético se comporta no interior da casca. Para isso, devemos aplicar as condições de contorno definidas pelas equações 2.22 e 2.23. Condição para  $\rho = a$ , para os campos  $\vec{B}_i$  e  $\vec{B}_c$ , devemos ter

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2 = \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2.$$

Nesse caso temos que  $\hat{n}_2 = \hat{\rho}$ , de forma que

$$\vec{B}_i \cdot \hat{\rho} = \vec{B}_c \cdot \hat{\rho}.$$

Usando as equações 3.7 e 3.9 e aplicando o produto escalar acima, teremos

$$\vec{B}_i \cdot \hat{\rho} = -\mu_0 (C_1 \cos \theta + 2C_2 \rho \cos 2\theta + \dots),$$

e

$$\vec{B}_c \cdot \hat{\rho} = -\mu (F_0 \rho^{-1} + E_1 \cos \theta - F_1 \rho^{-2} \cos \theta + 2E_2 \rho \cos 2\theta - 2F_2 \rho^{-3} \cos 2\theta + \dots).$$

Fazendo  $\rho = a$ , devemos ter

$$\begin{aligned} \mu_0 (C_1 \cos \theta + 2C_2 a \cos 2\theta + \dots) = \\ \mu (F_0 a^{-1} + E_1 \cos \theta - F_1 a^{-2} \cos \theta + 2E_2 a \cos 2\theta - 2F_2 a^{-3} \cos 2\theta + \dots). \end{aligned}$$

Comparando os dois lados temos

$$F_0 = 0, \tag{3.11}$$

$$C_1 = \frac{\mu}{\mu_0} \left( E_1 - \frac{F_1}{a^2} \right), \tag{3.12}$$

$$C_2 = \frac{\mu}{\mu_0} \left( E_2 - \frac{F_2}{a^4} \right), \tag{3.13}$$

$$C_n = \frac{\mu}{\mu_0} \left( E_n - \frac{F_n}{a^{2n}} \right), \quad \forall n \geq 2. \tag{3.14}$$

A equação 2.23 nos dá a segunda condição de contorno

$$\hat{n}_2 \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}.$$

Como não temos correntes reais, devemos ter  $\vec{J} = 0$  e consequentemente teremos

$$\hat{n}_2 \times \vec{H}_2 = \hat{n}_2 \times \vec{H}_1.$$

Como  $\hat{n}_2 = \hat{\rho}$ , temos

$$\hat{\rho} \times \vec{H}_i = \hat{\rho} \times \vec{H}_c.$$

Usando as equações 3.8 e 3.10

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \times \vec{H}_i &= \hat{\rho} \times \left[ - (C_1 \cos \theta + 2C_2 \rho \cos 2\theta + \dots) \hat{\rho} + (C_1 \sin \theta + 2C_2 \rho \sin 2\theta + \dots) \hat{\theta} \right] \\ &= (C_1 \sin \theta + 2C_2 \rho \sin 2\theta + \dots) \hat{\rho} \times \hat{\theta} \\ &= (C_1 \sin \theta + 2C_2 \rho \sin 2\theta + \dots) \hat{k}. \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} \times \vec{H}_c &= \hat{\rho} \times \left[ - \left( F_0 \rho^{-1} + E_1 \cos \theta - F_1 \rho^{-2} \cos \theta + 2E_2 \rho \cos 2\theta - 2F_2 \rho^{-3} \cos 2\theta + \dots \right) \hat{\rho} \right. \\
&\quad \left. + \left( E_1 \sin \theta + F_1 \rho^{-2} \sin \theta + 2E_2 \rho \sin 2\theta + 2F_2 \rho^{-3} \sin 2\theta + \dots \right) \hat{\theta} \right] \\
&= \left( E_1 \sin \theta + F_1 \rho^{-2} \sin \theta + 2E_2 \rho \sin 2\theta + 2F_2 \rho^{-3} \sin 2\theta + \dots \right) \hat{\rho} \times \hat{\theta} \\
&= \left( E_1 \sin \theta + F_1 \rho^{-2} \sin \theta + 2E_2 \rho \sin 2\theta + 2F_2 \rho^{-3} \sin 2\theta + \dots \right) \hat{k};
\end{aligned}$$

Então

$$(C_1 \sin \theta + 2C_2 \rho \sin 2\theta + \dots) \hat{k} = \left( E_1 \sin \theta + F_1 \rho^{-2} \sin \theta + 2E_2 \rho \sin 2\theta + 2F_2 \rho^{-3} \sin 2\theta + \dots \right) \hat{k}$$

Comparando os dois lados da igualdade acima, devemos ter

$$C_1 = E_1 + \frac{F_1}{a^2}, \quad (3.15)$$

$$C_2 = E_2 + \frac{F_2}{a^4}, \quad (3.16)$$

$$C_n = E_n + \frac{F_n}{a^{2n}}, \quad \forall n \geq 2. \quad (3.17)$$

Juntando os resultados das equações 3.12, 3.13, 3.14 com as equações 3.15, 3.16 e 3.17, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{\mu_0} \left( E_1 - \frac{F_1}{a^2} \right) &= E_1 + \frac{F_1}{a^2}, \\
\frac{\mu}{\mu_0} \left( E_n - \frac{F_n}{a^{2n}} \right) &= E_n + \frac{F_n}{a^{2n}}, \quad \forall n \geq 2.
\end{aligned}$$

Fazendo a distributiva dos coeficientes  $\mu$  e  $\mu_0$  e isolando  $E_1$  e  $E_n$  temos

$$E_1 = \left( \frac{\mu + \mu_0}{\mu - \mu_0} \right) \frac{F_1}{a^2}, \quad (3.18)$$

$$(3.19)$$

$$E_n = \left( \frac{\mu + \mu_0}{\mu - \mu_0} \right) \frac{F_n}{a^{2n}}, \quad \forall n \geq 2. \quad (3.20)$$

Vamos fazer agora a condição de contorno para a outra interface, onde  $\rho = b$ . Da primeira condição

$$\vec{B}_c \cdot \hat{n}_2 = \vec{B}_f \cdot \hat{n}_2 \quad \therefore \quad \vec{B}_c \cdot \hat{\rho} = \vec{B}_f \cdot \hat{\rho}.$$

Já sabemos da equação 3.11 que  $F_0 = 0$  e, como sobra apenas a coordenada  $\rho$ , então

$$\begin{aligned} & \mu \left( E_1 \cos \theta - F_1 b^{-2} \cos \theta + 2E_2 b \cos 2\theta - 2F_2 b^{-3} \cos 2\theta \right) \\ &= \mu_0 \left( \frac{B}{\mu_0} \cos \theta + B_1 b^{-2} \cos \theta + 2B_2 b^{-3} \cos 2\theta \right). \end{aligned}$$

Comparando os dois lados da igualdade, temos:

$$-\mu \left( E_1 - \frac{F_1}{b^2} \right) = \mu_0 \left( \frac{B}{\mu_0} + \frac{B_1}{b^2} \right) \therefore -\frac{\mu}{\mu_0} \left( E_1 - \frac{F_1}{b^2} \right) = \frac{B}{\mu_0} + \frac{B_1}{b^2}, \quad (3.21)$$

$$-\mu \left( 2E_2 b - \frac{2F_2}{b^3} \right) = \mu_0 \frac{B_2}{b^3} \therefore -\frac{\mu}{\mu_0} \left( E_2 - \frac{F_2}{b^4} \right) = \frac{B_2}{b^4}, \quad (3.22)$$

$$-\frac{\mu}{\mu_0} \left( E_n - \frac{F_n}{b^{2n}} \right) = \frac{B_n}{b^{2n}}, \quad \forall n \geq 2. \quad (3.23)$$

A última condição é

$$\hat{n}_2 \times \vec{H}_c = \hat{n}_2 \times \vec{H}_f.$$

Prosseguindo, temos

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \times \vec{H}_c &= \hat{\rho} \times \left[ - \left( F_0 \rho^{-1} + E_1 \cos \theta - F_1 \rho^{-2} \cos \theta + 2E_2 \rho \cos 2\theta - 2F_2 \rho^{-3} \cos 2\theta + \dots \right) \hat{\rho} \right. \\ &\quad \left. + \left( E_1 \sin \theta + F_1 \rho^{-2} \sin \theta + 2E_2 \rho \sin 2\theta + 2F_2 \rho^{-3} \sin 2\theta + \dots \right) \hat{\theta} \right] \\ &= \left( E_1 \sin \theta + F_1 \rho^{-2} \sin \theta + 2E_2 \rho \sin 2\theta + 2F_2 \rho^{-3} \sin 2\theta + \dots \right) \hat{\rho} \times \hat{\theta} \\ &= \left( E_1 \sin \theta + F_1 \rho^{-2} \sin \theta + 2E_2 \rho \sin 2\theta + 2F_2 \rho^{-3} \sin 2\theta + \dots \right) \hat{k}. \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_2 \times \vec{H}_f &= \hat{\rho} \times \left[ \left( \frac{B}{\mu_0} \cos \theta + \frac{B_1}{\rho^2} \cos \theta + \frac{2B_2}{\rho^3} \cos 2\theta + \dots \right) \hat{\rho} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{B}{\mu_0} \sin \theta - \frac{B_1}{\rho^2} \sin \theta - \frac{2B_2}{\rho^3} \sin 2\theta \dots \right) \hat{\theta} \right] \\ &= - \left( \frac{B}{\mu_0} \sin \theta - \frac{B_1}{\rho^2} \sin \theta - \frac{2B_2}{\rho^3} \sin 2\theta \dots \right) \hat{\rho} \times \hat{\theta} \\ &= - \left( \frac{B}{\mu_0} \sin \theta - \frac{B_1}{\rho^2} \sin \theta - \frac{2B_2}{\rho^3} \sin 2\theta \dots \right) \hat{k}. \end{aligned}$$

Igualando

$$\begin{aligned} \left( E_1 \sin \theta + F_1 \rho^{-2} \sin \theta + 2E_2 \rho \sin 2\theta + 2F_2 \rho^{-3} \sin 2\theta + \dots \right) \hat{k} &= \\ - \left( \frac{B}{\mu_0} \sin \theta - \frac{B_1}{\rho^2} \sin \theta - \frac{2B_2}{\rho^3} \sin 2\theta \dots \right) \hat{k}. \end{aligned}$$

Comparando os dois lados da igualdade temos

$$E_1 + \frac{F_1}{b^2} = - \left( \frac{B}{\mu_0} - \frac{B_1}{b^2} \right) \therefore E_1 + \frac{F_1}{b^2} = \frac{B_1}{b^2} - \frac{B}{\mu_0}, \quad (3.24)$$

$$2E_2b + \frac{2F_2}{b^3} = \frac{2B_2}{b^3} \therefore E_2 + \frac{F_2}{b^4} = \frac{B_2}{b^4}, \quad (3.25)$$

$$E_n + \frac{F_n}{b^{2n}} = \frac{B_n}{b^{2n}}, \quad \forall n \geq 2. \quad (3.26)$$

Comparando as equações 3.21 e 3.24, encontramos

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{\mu_0} \left( E_1 - \frac{F_1}{b^2} \right) &= \frac{B}{\mu_0} + E_1 + \frac{F_1}{b^2} + \frac{B}{\mu_0}, \\ \frac{-\mu}{\mu_0} E_1 - E_1 &= \frac{2B}{\mu_0} + \frac{F_1}{b^2} - \frac{\mu}{\mu_0} \frac{F_1}{b^2}, \\ - \left( \frac{\mu}{\mu_0} + 1 \right) E_1 &= \frac{2B}{\mu_0} + \frac{F_1}{b^2} \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_0} \right), \\ \left( \frac{\mu}{\mu_0} + 1 \right) E_1 &= \frac{-2B}{\mu_0} + \frac{F_1}{b^2} \left( \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right). \end{aligned}$$

Isolando  $E_1$ , teremos

$$E_1 = \frac{-2B}{\mu + \mu_0} + \frac{F_1}{b^2} \left( \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \right). \quad (3.27)$$

Agora comparando as equações 3.22 com 3.25,

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{\mu_0} \left( E_2 - \frac{F_2}{b^4} \right) &= E_2 + \frac{F_2}{b^4}, \\ -\frac{\mu}{\mu_0} E_2 - E_2 &= -\frac{\mu}{\mu_0} \frac{F_2}{b^4} + \frac{F_2}{b^4}, \\ \left( \frac{\mu}{\mu_0} + 1 \right) E_2 &= \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{F_2}{b^4}. \end{aligned}$$

Isolando  $E_2$ , teremos

$$E_2 = \left( \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \right) \frac{F_2}{b^4}.$$

Fazendo o mesmo com as equações 3.23 e 3.26, de forma análoga, teremos

$$E_n = \left( \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \right) \frac{F_n}{b^{2n}}, \quad \forall n \geq 2. \quad (3.28)$$

Igualando as equações 3.18 e 3.27 teremos

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mu + \mu_0}{\mu - \mu_0} \right) \frac{F_1}{a^2} &= \frac{-2B}{\mu + \mu_0} + \frac{F_1}{b^2} \left( \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \right), \\ \left( \frac{\mu + \mu_0}{\mu - \mu_0} \frac{1}{a^2} - \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{1}{b^2} \right) F_1 &= \frac{-2B}{\mu + \mu_0}. \end{aligned}$$

Então

$$F_1 = \frac{-2B}{\mu + \mu_0} \left[ \frac{(\mu + \mu_0)^2 b^2 - (\mu - \mu_0)^2 a^2}{(\mu - \mu_0)(\mu + \mu_0) a^2 b^2} \right]^{-1} \therefore F_1 = \frac{-2B}{\mu + \mu_0} \left[ \frac{(\mu - \mu_0)(\mu + \mu_0) a^2 b^2}{(\mu + \mu_0)^2 b^2 - (\mu - \mu_0)^2 a^2} \right].$$

$$F_1 = -2B \left[ \frac{(\mu - \mu_0) a^2 b^2}{(\mu + \mu_0)^2 b^2 - (\mu - \mu_0)^2 a^2} \right] \therefore F_1 = \frac{2B(\mu - \mu_0) a^2 b^2}{(\mu - \mu_0)^2 a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2}.$$

Para simplificar, podemos fazer

$$\chi_m = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \rightarrow \mu - \mu_0 = \mu_0 \chi_m.$$

Dessa forma

$$F_1 = \frac{2\mu_0 \chi_m a^2 b^2 B}{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2}.$$

Agora iremos igualar as equações 3.20 e 3.28

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mu + \mu_0}{\mu - \mu_0} \right) \frac{F_n}{a^2} &= \left( \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \right) \frac{F_n}{b^2}, \\ F_n &= \left( \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \right)^2 \frac{a^2}{b^2} F_n. \end{aligned}$$

Esse resultado só pode ser satisfeito quando  $F_n = 0$  para qualquer valor de  $n$  maior ou igual a dois. Segue que das equações 3.28 e 3.26,  $B_n$  também deve ser nulo para valores de  $n$  maior ou igual a dois. Vamos substituir o resultado encontrado para  $F_1$  na equação 3.27, lembrando que  $\mu - \mu_0 = \mu_0 \chi_m$ :

$$E_1 = \frac{-2B}{\mu + \mu_0} + \frac{F_1}{b^2} \left( \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \right),$$

$$E_1 = \frac{-2B}{\mu + \mu_0} + \frac{\mu_0 \chi_m}{b^2(\mu + \mu_0)} \cdot \frac{2\mu_0 \chi_m a^2 b^2 B}{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2}.$$

Simplificando  $E_1$ , temos

$$E_1 = \frac{-2B}{\mu + \mu_0} + \frac{2B}{\mu + \mu_0} \cdot \frac{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2},$$

$$E_1 = \frac{2B}{\mu + \mu_0} \left[ \frac{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2} - 1 \right],$$

$$E_1 = \frac{2B}{\mu + \mu_0} \left[ \frac{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 - \mu_0^2 \chi_m^2 a^2 + (\mu + \mu_0)^2 b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2} \right],$$

$$E_1 = \frac{2(\mu + \mu_0)b^2 B}{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 - (\mu + \mu_0)b^2}.$$

Com o uso da equação 3.24, vamos obter o coeficiente  $B_1$

$$E_1 + \frac{F_1}{b^2} = \frac{B_1}{b^2} - \frac{B}{\mu_0}.$$

Substituindo os coeficientes  $E_1$  e  $F_1$ , temos

$$\frac{2(\mu + \mu_0)b^2 B}{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2} + \frac{2\mu_0 \chi_m a^2 b^2 B}{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2} \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{B_1}{b^2} - \frac{B}{\mu_0},$$

$$\frac{B_1}{b^2} = \frac{B}{\mu_0} + \frac{2(\mu + \mu_0)b^2 + 2\mu_0 \chi_m a^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 - \mu_0(\mu + \mu_0)^2 b^2} \cdot B,$$

$$\frac{B_1}{b^2} = \frac{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2 + 2\mu_0(\mu + \mu_0)b^2 + 2\mu_0^2 \chi_m a^2}{\mu_0^3 \chi_m^2 a^2 - \mu_0(\mu + \mu_0)^2 b^2} \cdot B,$$

$$\frac{B_1}{b^2} = \frac{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 + 2\mu_0^2 \chi_m a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2 + (2\mu_0 \mu + 2\mu_0^2)b^2}{\mu_0^3 \chi_m^2 a^2 - \mu_0(\mu + \mu_0)^2 b^2} \cdot B,$$

$$\frac{B_1}{b^2} = \frac{\mu_0^2 \chi_m a^2 (\chi_m + 2) - (\mu^2 + \mu_0^2 + 2\mu\mu_0)b^2 + (2\mu\mu_0 + 2\mu_0^2)b^2}{\mu_0^3 \chi_m^2 a^2 - \mu_0(\mu + \mu_0)^2 b^2} \cdot B.$$

$$\frac{B_1}{b^2} = \frac{\mu_0^2 \chi_m a^2 (\chi_m + 2) - (\mu^2 + \mu_0^2 + 2\mu\mu_0 - 2\mu\mu_0 - 2\mu_0^2) b^2}{\mu_0^3 \chi_m^2 a^2 - \mu_0 (\mu + \mu_0)^2 b^2} \cdot B,$$

$$\frac{B_1}{b^2} = \frac{\mu_0^2 \chi_m a^2 (\chi_m + 2) - (\mu + \mu_0)(\mu - \mu_0) b^2}{\mu_0^3 \chi_m^2 a^2 - \mu_0 (\mu + \mu_0)^2 b^2} \cdot B.$$

Finalmente, temos

$$B_1 = \chi_m b^2 \cdot \frac{\mu_0 a^2 (\chi_m + 2) - (\mu + \mu_0) b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 - \mu_0 (\mu + \mu_0)^2 b^2} \cdot B.$$

Nos resta obter agora o coeficiente  $C_1$ . Da equação 3.15, temos

$$C_1 = E_1 + \frac{F_1}{a^2} \therefore C_1 = \frac{2(\mu + \mu_0) b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2} \cdot B + \frac{2\mu_0 \chi_m b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2} \cdot B,$$

$$C_1 = \frac{2(\mu + \mu_0) b^2 + 2\mu_0 \chi_m b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2} \cdot B.$$

Como  $\mu_0 \chi_m = \mu - \mu_0$ , então

$$C_1 = \frac{2(\mu + \mu_0) b^2 + 2(\mu - \mu_0) b^2}{(\mu - \mu_0)^2 a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2} \cdot B \therefore C_1 = \frac{4\mu b^2}{(\mu - \mu_0)^2 a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2} \cdot B.$$

## 4 Resultados

Já temos todas as constantes necessárias para encontrar os valores dos campos magnéticos nas três regiões possíveis, interno à casca, fora da casca e na própria casca. O objetivo desse trabalho é mostrar que materiais ferromagnéticos tem propriedades de blindagem magnética. Portanto queremos obter o comportamento do campo magnético apenas no interior da casca.

Da equação 3.7, temos que

$$\vec{B}_i = -\mu_0 (C_1 \cos \theta + 2C_2 \rho \cos 2\theta + \dots) \hat{\rho} + \mu_0 (C_1 \sin \theta + 2C_2 \rho \sin 2\theta + \dots) \hat{\theta}.$$

Apenas o coeficiente  $C_1$  não é nulo, de forma que a equação acima se reduz a

$$\vec{B}_i = -\mu_0 C_1 \cos \theta \hat{\rho} + \mu_0 C_1 \sin \theta \hat{\theta},$$

$$\vec{B}_i = \mu_0 C_1 (-\cos \theta \hat{\rho} + \sin \theta \hat{\theta}),$$

$$\vec{B}_i = \mu_0 \frac{4\mu b^2}{(\mu - \mu_0)^2 a^2 - (\mu + \mu_0)^2 b^2} \cdot B (-\cos \theta \hat{\rho} + \sin \theta \hat{\theta}).$$

Pela geometria usada, devemos ter  $\hat{i} = \cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{\theta}$ . Fazendo algumas manipulações na equação acima, teremos

$$\vec{B}_i = \frac{4\mu\mu_0 b^2}{(\mu + \mu_0)^2 b^2 - (\mu - \mu_0)^2 a^2} \cdot B \hat{i}. \quad (4.1)$$

O resultado acima nos mostra como o campo magnético se comporta dentro da casca cilíndrica. Podemos fazer uma aproximação quando a permeabilidade magnética do material  $\mu$  for muito maior do que a permeabilidade magnética do vácuo  $\mu_0$ .

$$\vec{B}_i = \frac{4\mu\mu_0 b^2}{\mu^2(1 + \frac{\mu_0}{\mu})^2 b^2 - \mu^2(1 - \frac{\mu_0}{\mu})^2 a^2} \cdot \vec{B} = \frac{4\mu_0 b^2}{\mu \left[ (1 + \frac{\mu_0}{\mu})^2 b^2 - (1 - \frac{\mu_0}{\mu})^2 a^2 \right]} \cdot \vec{B}.$$

Fazendo  $\mu \gg \mu_0$ , devemos ter

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0}{\mu} \cdot \frac{4b^2}{b^2 - a^2} \cdot \vec{B}. \quad (4.2)$$

O comportamento do campo magnético está representado na figura abaixo onde temos  $\mu = 1000\mu_0$ ,  $a = 4$  cm e  $b = 4$  cm.

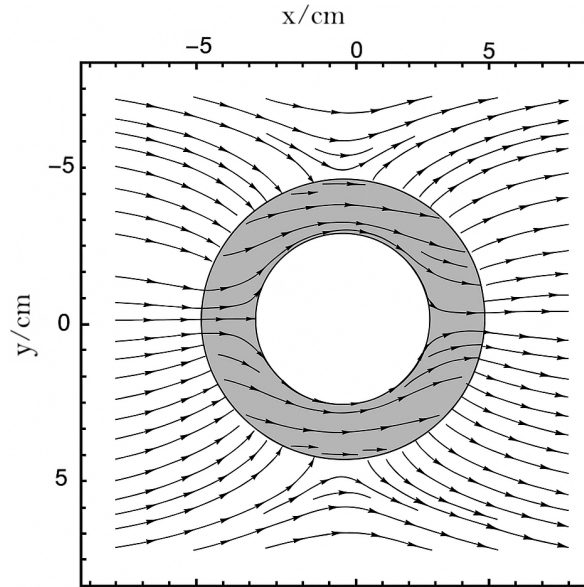


Figura 10 – Linhas de campo magnético ao redor de uma casca cilíndrica.

Fonte: Rafael Ramos Marques (2025)

A imagem acima apresenta as linhas de campo magnético ao redor de uma casca cilíndrica oca. Esta visualização permite uma análise clara do comportamento do campo magnético em diferentes regiões do espaço ao redor e no interior da casca. Observa-se que as linhas de campo contornam a casca sem penetrar em seu interior. Essa ausência de linhas de campo dentro da região oca indica que o campo magnético no interior da casca é nulo, conforme previsto teoricamente. Esse fenômeno é análogo ao comportamento do campo elétrico no interior de um condutor esférico oco carregado, onde o campo também se anula devido à simetria da distribuição. No caso magnético, a simetria cilíndrica e a ausência de correntes internas garantem essa nulidade.

Além disso, percebe-se que, nas regiões externas à casca, o campo magnético se distribui de forma contínua, contornando a casca e ajustando sua direção e densidade de acordo com a geometria do problema. As linhas mais densas indicam regiões de campo mais intenso, enquanto a ausência de linhas no interior reforça visualmente a conclusão de que não há campo magnético atuando ali.

## 5 Considerações finais

A equação 4.2 nos permite entender a intensidade do campo magnético dentro da casca cilíndrica analisada. Considerando que  $\mu \gg \mu_0$ , como o campo magnético interno é inversamente proporcional à permeabilidade magnética do material  $\mu$ , podemos concluir que para valores elevados de  $\mu$  o campo interno  $\vec{B}_i$  tenderá a zero.

## Referências

JACKSON, J. D. *Eletrodinâmica Clássica*. [S.l.]: Guanabara Dois, 1983. [6](#)

MACHADO, K. D. *Teoria do Eletromagnetismo*. [S.l.]: UEPG, 2002. (Teoria do Eletromagnetismo, v. 2). [7](#), [9](#), [11](#), [19](#), [23](#)

PIRES, A. S. T. *Evolução das Ideias da Física*. [S.l.]: LF Editorial, 2011. [6](#)

REITZ, F. J. M. J. R.; CHRISTY, R. W. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. [S.l.]: Elsevier, 1982. [12](#), [15](#), [16](#), [20](#)