



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA**  
**CENTRO DAS CIÊNCIAS EXATAS E DAS TECNOLOGIAS**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**OBTENÇÃO DE VOLUMES ÓTIMOS DE ESTRUTURAS SUJEITAS A**  
**CARGA AXIAL DE COMPRESSÃO UTILIZANDO ALGORITMOS**  
**GENÉTICOS**

**LUCAS RIBEIRO DOS SANTOS**

**BARREIRAS-BA**  
**MARÇO-2018**

**LUCAS RIBEIRO DOS SANTOS**

**OBTENÇÃO DE VOLUMES ÓTIMOS DE ESTRUTURAS SUJEITAS A  
CARGA AXIAL DE COMPRESSÃO UTILIZANDO ALGORITMOS  
GENÉTICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do  
Oeste da Bahia, como requisito à obtenção do grau de  
Engenheiro Civil.

Orientador: Dr. Pedro Cláudio dos Santos Vieira

**BARREIRAS-BA**

**MARÇO-2018**

## FICHA CATALOGRÁFICA

---

S237 Santos, Lucas Ribeiro dos.

Obtenção de volumes ótimos de estruturas sujeitas a carga axial de compressão utilizando algoritmos genéticos. / Lucas Ribeiro dos Santos. – 2018.  
107f.il.

Orientador Prof. Dr. Pedro Cláudio dos Santos Vieira  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) -  
Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro das Ciências Exatas e das  
Tecnologias, Barreiras, BA, 2018.

1. Engenharia Civil. I. Vieira, Pedro Cláudio dos Santos. II. Universidade  
Federal do Oeste da Bahia - Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias. III.  
Título.

CDD 624

LUCAS RIBEIRO DOS SANTOS

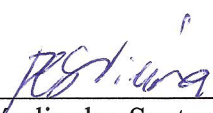
**OBTENÇÃO DE VOLUMES ÓTIMOS DE ESTRUTURAS SUJEITAS A  
CARGA AXIAL DE COMPRESSÃO UTILIZANDO ALGORITMOS  
GENÉTICOS**

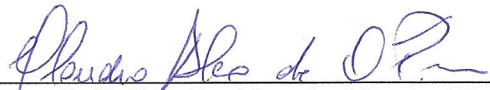
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do  
Oeste da Bahia, como requisito parcial à obtenção do  
grau de Engenheiro Civil.

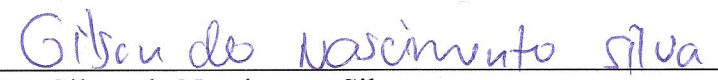
Aprovada em 21 de março de 2018.

**Banca Examinadora**

Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Pedro Cláudio dos Santos Vieira  
Universidade Federal do Oeste da Bahia

  
\_\_\_\_\_  
Eng. Civil Cláudio Alex de Oliveira Pires  
Universidade Federal do Oeste da Bahia

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Gilson do Nascimento Silva  
Universidade Federal do Oeste da Bahia

*À minha mãe Iracema Ribeiro,  
por todo amor, carinho e apoio.  
Serei sempre grato por seus conselhos e orientações.*

## AGRADECIMENTOS

Antes de tudo agradeço a Deus que sempre me deu forças para seguir em frente e nunca desistir de ter trilhado este caminho. Foram muitos momentos de dificuldades, sofrimentos e lamentações, mas felizmente tudo deu certo ao final.

Agradeço à minha mãe Iracema Ribeiro dos Santos que foi a principal pessoa que me motivou e incentivou-me a seguir o caminho dos estudos. Lembro-me dos momentos em que se sacrificou física e mentalmente para que nunca nos faltasse nada. É a ela quem mais desejo todos os agradecimentos por essa realização. Obrigado!

A meu irmão Rodrigo Ribeiro dos Santos por ser um grande amigo e companheiro de vida.

A meus familiares que sempre me deram total apoio pelo caminho que trilhei.

A meus amigos Allef Davi, Camila Rodrigues, Rizia Gonçalves, Marília Almeida, Lorena Rocha, Pedro Henrique Rocha, Michael Pedrosa, e a tantos outros, por terem se tornado umas das maiores alegrias que tive a honra de conhecer nesse período de faculdade.

Agradeço a meu orientador Pedro Cláudio dos Santos Vieira por ter sido o grande incentivador para a realização deste trabalho. Pela sua paciência, dedicação e motivação, além de ter sido um pilar essencial para minha formação acadêmica.

A meus professores Claudio Alex de Oliveira Pires, Elier Pavon De La Fé, Juarez Hoppe Filho, Oisy Hernández Menéndez e Pedro Cláudio dos Santos Vieira por contribuírem significativamente para meu desenvolvimento intelectual e crítico durante esta caminhada, e que sem sombra de dúvida levarei para a vida.

Ao Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias (CCET) da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB), por ter proporcionado condições de desenvolver este trabalho.

## RESUMO

Todo e qualquer elemento de uma edificação que trabalhe transferindo ou recebendo cargas de solicitação pode ser considerado como elemento estrutural. Os elementos estruturais mais comumente empregados em obras de engenharia são as fundações, os pilares, as vigas e as lajes. Destes, os pilares podem ser considerados como um dos elementos de maior relevância nas obras de construção, pois eles serão responsáveis por dar suporte à construção dos andares superiores, no caso de edifícios com mais de um pavimento, ou à construção da estrutura de telhados e/ou lajes no caso de edificações simples de um pavimento. Em geral podem ser construídos in loco, através do uso de concreto armado (concreto + aço), ou podem ser montados, por meio de estruturas pré-moldadas de concreto armado, estruturas de aço e/ou estruturas de madeira. Existem diversas técnicas que podem ser empregadas para o cálculo e dimensionamento de estruturas do tipo pilar, uma delas é através do uso de modelos empregando algoritmos genéticos. Estes modelos trabalham com a busca de soluções ótimas que possam gerar resultados dimensionais mais econômicos e satisfatórios, buscando obter configurações estruturais mais precisas e seguras. Este trabalho tem como objetivo criar um modelo computacional, baseado em algoritmos genéticos, para realizar a otimização de estruturas do tipo pilar e obter volumes mais econômicos do ponto de vista da engenharia. Os resultados obtidos revelam que o modelo computacional cumpre com os critérios de busca estabelecidos, respeitando as avaliações quanto à segurança impostas pela NBR 6118/2014 e sempre buscando encontrar soluções que possibilitem obter melhores lucros.

**Palavras-chave:** Algoritmo genético; otimização; pilar; volume ótimo; geração.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração de uma estrutura do tipo pilar. ....	23
Figura 2 – Transferência das cargas atuantes em uma estrutura. ....	24
Figura 3– Distâncias $l_0$ e $l$ . ....	26
Figura 4 – Gráfico de soluções gerado pela função de avaliação. ....	30
Figura 5 – Representação de um cromossomo, gene e alelo. ....	32
Figura 6 – Processo de seleção por roleta. ....	34
Figura 7 – Gráfico da função seno. ....	35
Figura 8 - Operador de Cruzamento de um ponto. ....	38
Figura 9 - Operador de Crossover de dois pontos. ....	38
Figura 10 - Operador de Cruzamento de um ponto e operador de mutação agindo em conjunto. ....	39
Figura 11 – Modelo empregado para o estudo do carregamento axial em colunas. ....	44
Figura 12 – Tipos de seção transversal empregadas no modelo. ....	44
Figura 13 – Inércia de elementos de seção circular. ....	45
Figura 14 – Inércia de elementos de seção quadrada. ....	46
Figura 15 – Inércia de elementos de seção triangular. ....	47
Figura 16 – Dimensões dos protótipos das colunas utilizadas na série 1. ....	56
Figura 17 – Dimensões dos protótipos das colunas utilizadas na série 2. ....	56
Figura 18 – Características geométricas dos protótipos para a série 1. ....	62
Figura 19 – Características geométricas dos protótipos para a série 2. ....	62
Figura 20 - Fluxograma do procedimento de análise do algoritmo genético. ....	64
Figura 21 – Parâmetros de entrada do programa de otimização. ....	69
Figura 22 – Maximização da função $F(x)=\text{sen}(x)$ ....	71
Figura 23 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Fu e Ren (1992). ....	75
Figura 24 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação por ponto flutuante (FP). ....	75
Figura 25 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação Binária (B). ....	76
Figura 26 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação binária com código Gray. ....	76

Figura 27 - Comparação final entre os volumes obtidos em cada uma das abordagens de otimização. ....	77
Figura 28 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Fu e Ren (1992). ....	79
Figura 29 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação por ponto flutuante (FP). ....	79
Figura 30 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação Binária (B). ....	80
Figura 31 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação binária com código Gray. ....	80
Figura 32 - Comparação entre os volumes obtidos em cada uma das abordagens de otimização. ....	81
Figura 33 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Fu e Ren (1992). ....	83
Figura 34 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação por ponto flutuante (FP). ....	83
Figura 35 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação Binária (B). ....	84
Figura 36 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação binária com código Gray. ....	84
Figura 37 - Comparação entre os volumes obtidos em cada uma das abordagens de otimização. ....	85
Figura 38 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Fu e Ren (1992). ....	87
Figura 39 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação por ponto flutuante (FP). ....	88
Figura 40 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação Binária (B). ....	89
Figura 41 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação binária com código Gray. ....	89
Figura 42 - Comparação entre os volumes obtidos em cada uma das abordagens de otimização. ....	90
Figura 43 – Convergência da solução para a coluna 25 mm côncava (Série 1). ....	91
Figura 44 - Convergência da solução para a coluna 10 mm côncava (Série 1). ....	92

Figura 45 - Convergência da solução para a coluna Reta (Série 1).....	93
Figura 46 - Convergência da solução para a coluna 10mm convexa (Série 1). ....	94
Figura 47 - Convergência da solução para a coluna 25mm convexa (Série 1). ....	95
Figura 48 – Convergência dos resultados para a coluna 25mm côncava (Série 2). ....	96
Figura 49 - Convergência dos resultados para a coluna 10mm côncava (Série 2).....	97
Figura 50 - Convergência dos resultados para a coluna reta (Série 2).....	98
Figura 51 - Convergência dos resultados para a coluna 10mm convexa (Série 2).....	98
Figura 52 - Convergência dos resultados para a coluna 25mm convexa (Série 2).....	99

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores do coeficiente adicional $\gamma n$ para pilares. ....	25
Tabela 2 – Nomenclatura de diferenciação entre as áreas da genética e dos algoritmos genéticos.....	32
Tabela 3 – Valores do coeficiente $\alpha$ .....	45
Tabela 4 - Valores do coeficiente K .....	48
Tabela 5 - Resultados para colunas de protótipos da série 1.....	58
Tabela 6 - Resultados para colunas de protótipos da série 2.....	58
Tabela 7 - Parâmetros de análise do algoritmo genético. ....	67
Tabela 8 – Resultados de busca do algoritmo genético para a função $F(x)=\text{sen}(x)$ . ....	71
Tabela 9 - Volumes obtidos para os casos de carregamentos .....	72
Tabela 10 - Resultados finais obtidos pelo algoritmo genético para estruturas de seção circular.....	73
Tabela 11 - Resultados finais dos diâmetros obtidos com o auxílio do algoritmo genético para elementos com seção circular.....	74
Tabela 12 – Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	75
Tabela 13 – Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	76
Tabela 14 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	76
Tabela 15 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.....	77
Tabela 16 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	77
Tabela 17 - Precisão dos resultados em comparação com cada um dos processos de otimização. ....	77
Tabela 18 - Resultados finais obtidos pelo algoritmo genético para estruturas com seção do tipo quadrada. ....	78
Tabela 19 - Resultados finais dos diâmetros, ou lados, obtidos com o auxílio do algoritmo genético para elementos com seção quadrada. ....	78
Tabela 20 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	79
Tabela 21 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	80
Tabela 22 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	80
Tabela 23 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	81
Tabela 24 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	81
Tabela 25 - Precisão dos resultados em comparação com cada um dos processos de otimização. ....	81

Tabela 26 - Resultados finais obtidos pelo algoritmo genético para estruturas com seção triangular. ....	82
Tabela 27 - Resultados finais dos diâmetros, ou lados, obtidos com o auxílio do algoritmo genético para elementos com seção triangular. ....	82
Tabela 28 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	83
Tabela 29 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	84
Tabela 30 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	84
Tabela 31 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	85
Tabela 32 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	85
Tabela 33 - Precisão dos resultados em comparação com cada um dos processos de otimização. ....	85
Tabela 34 - Resultados finais obtidos pelo algoritmo genético para estruturas com seção retangular. ....	86
Tabela 35 - Resultados finais dos diâmetros, ou lados, obtidos com o auxílio do algoritmo genético para elementos com seção retangular. ....	86
Tabela 36 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	87
Tabela 37 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	88
Tabela 38 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	89
Tabela 39 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	89
Tabela 40 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização. ....	90
Tabela 41 - Precisão dos resultados em comparação com cada um dos processos de otimização. ....	90
Tabela 42 – Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 25mm côncava (Série 1). ....	91
Tabela 43 – Diâmetros finais para a coluna 25mm côncava (Série 1). ....	92
Tabela 44 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 10mm côncava (Série 1). ....	92
Tabela 45 - Diâmetros finais para a coluna 25mm côncava (Série 1). ....	92
Tabela 46 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna Reta (Série 1). ....	92
Tabela 47 - Diâmetros finais para a coluna Reta (Série 1). ....	93
Tabela 48 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 10mm convexa (Série 1). ....	93
Tabela 49 - Diâmetros finais para a coluna 10mm convexa (Série 1). ....	94
Tabela 50 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 25mm convexa (Série 1). ....	94

Tabela 51 - Diâmetros finais para a coluna 25mm convexa (Série 1).....	95
Tabela 52 – Volumes finais para as colunas da série 1 de protótipos. ....	95
Tabela 53 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 25mm côncava (Série 2).	96
Tabela 54 - Diâmetros finais para a coluna 25mm côncava (Série 2). ....	96
Tabela 55 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 10mm côncava (Série 2).	97
Tabela 56 - Diâmetros finais para a coluna 10mm côncava (Série 2). ....	97
Tabela 57 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna Reta (Série 2).....	97
Tabela 58 - Diâmetros finais para a coluna Reta (Série 2). ....	98
Tabela 59 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 10mm convexa (Série 2). .....	98
Tabela 60 - Diâmetros finais para a coluna 10mm convexa (Série 2).....	99
Tabela 61 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 25mm convexa (Série 2). .....	99
Tabela 62 - Diâmetros finais para a coluna 25mm convexa (Série 2).....	99
Tabela 63 – Volumes finais para as colunas da série 2 de protótipos. ....	100

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>18</b>
<b>1.1 JUSTIFICATIVA.....</b>	<b>19</b>
<b>1.2 IMPORTÂNCIA DO TEMA.....</b>	<b>19</b>
<b>1.3 OBJETIVO GERAL .....</b>	<b>21</b>
<b>1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....</b>	<b>21</b>
<b>2. REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>22</b>
<b>2.1 PILARES .....</b>	<b>22</b>
<b>2.1.1 Carregamentos sobre os pilares.....</b>	<b>24</b>
<b>2.1.2 Características Geométricas .....</b>	<b>25</b>
2.1.2.1 Dimensões mínimas.....	25
2.1.2.2 Comprimento Equivalente .....	25
<b>2.2 MÉTODO DOS ALGORITMOS GENÉTICOS .....</b>	<b>26</b>
<b>2.2.1 Teoria da Evolução .....</b>	<b>28</b>
<b>2.2.2 O Algoritmo Genético .....</b>	<b>29</b>
<b>2.2.3 Terminologia.....</b>	<b>30</b>
<b>2.2.4 População Inicial .....</b>	<b>32</b>
<b>2.2.5 Processo de Seleção .....</b>	<b>33</b>
<b>2.2.6 Função de Avaliação (Fitness).....</b>	<b>34</b>
<b>2.2.7 Elitismo .....</b>	<b>36</b>
<b>2.2.8 Operadores Genéticos.....</b>	<b>36</b>
2.2.8.1 Operador de Cruzamento (Crossover).....	37
2.2.8.1.1 Cruzamento de um ponto.....	37
2.2.8.1.2 Cruzamento de dois pontos.....	38
2.2.8.2 Operador de Mutação .....	39
<b>2.2.9 Procedimento de análise do algoritmo genético .....</b>	<b>40</b>
<b>2.3 MODELO DE CÁLCULO PARA DETERMINAÇÃO DOS VOLUMES ÓTIMOS.....</b>	<b>41</b>
<b>2.3.1 Definição da equação governante do problema.....</b>	<b>41</b>
<b>2.3.2 Modelo de Cálculo para estruturas carregadas axialmente por compressão.....</b>	<b>43</b>
2.3.2.1 Comprovação dos valores da constante $\alpha$ .....	45
2.3.2.2 Comprovação dos valores da constante K .....	48
<b>2.3.3 Modelo de Otimização .....</b>	<b>53</b>

<b>2.4 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO PARA UM MODELO EXPERIMENTAL .....</b>	<b>55</b>
<b>3. MATERIAL E MÉTODOS .....</b>	<b>60</b>
<b>3.1 CASO COELLO (2005) .....</b>	<b>60</b>
<b>3.1.1 Caso 1 (Elemento de seção circular).....</b>	<b>60</b>
<b>3.1.2 Caso 2 (Elemento de seção quadrada).....</b>	<b>60</b>
<b>3.1.3 Caso 3 (Elemento de seção triangular).....</b>	<b>60</b>
<b>3.1.4 Caso 4 (Elemento de seção retangular) .....</b>	<b>61</b>
<b>3.2 CASO PEDRESCHI (2015) .....</b>	<b>61</b>
<b>3.3 DESENVOLVIMENTO DO ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO.....</b>	<b>63</b>
<b>3.4 PARÂMETROS DE ENTRADA DO ALGORITMO GENÉTICO.....</b>	<b>67</b>
<b>4. RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>71</b>
<b>4.1 MAXIMIZAÇÃO DA FUNÇÃO APTIDÃO .....</b>	<b>71</b>
<b>4.2 CASOS COELLO (2005) .....</b>	<b>72</b>
<b>4.2.1 Caso 1: (Seção circular) .....</b>	<b>73</b>
<b>4.2.2 Caso 2: (Seção quadrada).....</b>	<b>78</b>
<b>4.2.3 Caso 3: (Seção triangular) .....</b>	<b>82</b>
<b>4.2.4 Caso 4: (Seção retangular) .....</b>	<b>86</b>
<b>4.3 CASOS PEDRESCHI (2015).....</b>	<b>91</b>
<b>4.3.1 Volumes finais para os protótipos da série 1 .....</b>	<b>91</b>
4.3.1.1 Coluna 25 mm côncava.....	91
4.3.1.2 Coluna 10 mm côncava.....	92
4.3.1.3 Coluna reta .....	92
4.3.1.4 Coluna 10 mm convexa .....	93
4.3.1.5 Coluna 25 mm convexa .....	94
<b>4.3.2 Volumes finais para os protótipos da série 2 .....</b>	<b>96</b>
4.3.2.1 Coluna 25mm côncava.....	96
4.3.2.2 Coluna 10 mm côncava.....	97
4.3.2.3 Coluna reta .....	97
4.3.2.4 Coluna 10 mm convexa .....	98
4.3.2.5 Coluna 25 mm convexa .....	99
<b>CONCLUSÕES</b>	
<b>REFERÊNCIAS</b>	
<b>APÊNDICE A – Dedução da equação diferencial finita</b>	

**APÊNDICE B – Parâmetros de entrada do algoritmo genético**

**APÊNDICE C – Tela de entrada de dados do programa**

**APÊNDICE D – Tela de saída de dados do programa**

## 1. INTRODUÇÃO

A busca por soluções ótimas, que refletem o ganho quanto ao custo de produção, manuseio e transporte, é um dos problemas mais comuns atualmente, principalmente devido à escassez de material e ao alto custo de equipamentos e mão-de-obra nas áreas afins de qualquer processo produtivo.

O desenvolvimento de técnicas e metodologias que visem à obtenção de melhorias contínuas em qualquer atividade ou meio de trabalho é uma maneira para estabelecer medidas de controle frente aos processos produtivos, na tomada de decisões e principalmente no ganho de tempo e dinheiro. Alternativas simples e eficazes podem contribuir significativamente para a redução do consumo de materiais além de estabelecer condições favoráveis para o desenvolvimento dos padrões mínimos de segurança e financeiros.

Uma das alternativas para se trabalhar com redução de custos, com tratamentos específicos de quantidade de materiais de modo ágil e confiável é através de processos de otimização. Uma dessas alternativas é a técnica de otimização empregando algoritmos genéticos.

A otimização de estruturas, ou membros estruturais, submetidas a carregamentos de compressão teve suas primeiras abordagens com os estudos de Leonhard Euler, por volta dos anos 1960. Euler desenvolveu a fórmula para cálculo da carga crítica de flambagem de uma coluna esbelta ideal, trabalhando com casos de colunas em que suas extremidades, inferior e superior, mantinham-se, respectivamente, fixa e livre. Com as análises feitas Euler conseguiu determinar relações importantíssimas para o estudo e emprego destes tipos de estruturas em área da engenharia, como a resistência dos materiais. EULER (1960)

De acordo com Coello (2005) os problemas de colunas não prismáticas, em que há variação da seção transversal, passou a ser estudado só mais recentemente com os estudos de A. N. Dinnik. Dinnik discutiu o projeto de colunas em que os momentos de inércia das seções variavam segundo uma potência da distância ao longo do eixo do membro. Posteriormente Keller e Tadjbakhsh (1962) estabeleceram condições para determinação de valores máximos para as cargas críticas formuladas por Euler, realizando variações nas equações diferenciais de equilíbrio e condições de contorno associadas às restrições de volume.

Fu e Ren (1992) comentam que em projetos práticos a determinação de todas as restrições dos materiais é importante, não apenas as relacionadas ao volume dos elementos. Dessa forma, baseando-se nos critérios definidos por Euler e Dinnik, Fu e Ren decidem adicionar os critérios de restrição ao problema de otimização utilizando um algoritmo

conhecido como método de gradiente reduzido generalizado para selecionar as variáveis de projeto em pontos nodais específicos. O método do gradiente reduzido generalizado lineariza as restrições não-lineares e usa procedimentos específicos do método para selecionar a melhor direção de pesquisas de todas as direções candidatas.

No presente trabalho será abordada a metodologia de otimização empregando algoritmos genéticos, com a finalidade de obtenção de volumes ótimos, e serão feitas análises entre os resultados obtidos com o processo de otimização empregando algoritmo genéticos e os obtidos por Fu e Ren ao empregar o método do gradiente reduzido generalizado.

## **1.1 JUSTIFICATIVA**

A escolha pelo tema proposto neste trabalho se justifica pelo crescimento constante que se observa na área da engenharia civil nos últimos anos e à demanda pelo consumo de matéria-prima para manutenção dos processos construtivos, além da quantidade de materiais que são desperdiçados durante a execução das atividades.

Os gastos desnecessários com materiais, ferramentas e equipamentos ocupam uma boa parcela do montante empregado para custeio dos processos de trabalho e aspectos construtivos em qualquer frente de trabalho. Desse modo, a adoção de um método fácil, rápido e barato, que possibilite calcular quantidades de insumos mantendo critérios normativos vigentes e assegurando a correspondente relação com a área de trabalho, pode contribuir significativamente para a manutenção do controle sobre as finanças em qualquer atividade da engenharia. Neste aspecto a técnica dos algoritmos genéticos pode ser uma solução importante para quem deseja trabalhar com processos de otimização em seus projetos.

A utilização dos algoritmos genéticos fornecerá a opção pela adoção de configurações para os elementos estruturais de maneira mais criteriosa, fazendo com que os dimensionamentos sejam realizados com as dimensões limites permitidos pelo programa de otimização. Essa abordagem resultará em um consumo relativamente menor de materiais e proporcionará maior economia para a execução das atividades.

## **1.2 IMPORTÂNCIA DO TEMA**

A evolução dos métodos construtivos empregados na criação de obras de engenharia desenvolveu-se de forma espantosa desde a constatação das primeiras edificações criadas pelo homem de que se tem conhecimento. O avanço das técnicas e a crescente inserção de

tecnologias mais aprimoradas possibilitou a geração de maiores frentes de trabalho, alinhadas com processos construtivos mais eficientes, rápidos e seguros. As estruturas do tipo pilar foram alguns dos elementos de grande importância nas edificações que sofreu mudanças quanto à forma de maneira especial.

A exigência pela criação de vãos cada vez maiores objetivando-se estabelecer melhor uso do espaço físico dentro das edificações foi um dos requisitos que levou à modificação das abordagens técnicas adotadas nos cálculos de dimensionamento das estruturas como um todo, acarretando na criação e/ou alteração de normas técnicas específicas.

Como os pilares, na maioria das obras da construção civil, são elementos que necessitam estar posicionados em pontos estratégicos para receberem as cargas solicitantes da edificação e as transferirem até as fundações, muitas vezes acabam alocando-se em meio a vãos ou tendo suas dimensões elevadas, a ponto de interferir no espaço visual de áreas de maior importância dentro de um ambiente, como salões de festas por exemplo, transformando-se em um inconveniente para os usuários finais da obra. Em vista disso cabe à etapa de projeto definir as melhores soluções, arquitetônicas e estruturais, afim de se obter configurações vantajosas tanto para o proprietário como para o projetista e o executor de determinado projeto, e/ou empreendimento.

Com a finalidade de tornar o dimensionamento de estruturas mais econômico e atrativo aos usuários finais de qualquer edificação, proprietários e usuários, torna-se fundamental pensar em métodos de otimização destes elementos para obter-se maior economia nas etapas de construção e melhor uso do ambiente em que se estará trabalhando.

Dentre os métodos e técnicas relacionados à otimização de estruturas destaca-se o uso dos algoritmos genéticos como ferramenta para a obtenção de configurações estruturais mais elaboradas e econômicas.

O uso dos algoritmos genéticos garante que as soluções procuradas terão viabilidade financeira pois trabalha com o objetivo de minimizar a quantidade de materiais empregados para a realização de determinada atividade, o que acarretará em uma redução do consumo de energia, equipamentos e mão-de-obra, resultando como consequência na redução do custo final dos serviços. Além disso, a abordagem ótima de estruturas trabalha levando-se em consideração os parâmetros relacionados à manutenção dos critérios de segurança estipulados por normas vigentes específicas, como a NBR 6118 para as estruturas de concreto armado, o que torna o método bem atrativo também quanto ao aspecto normativo.

Os algoritmos genéticos são um método de otimização computacional, baseados na teoria da evolução das espécies proposta por Charles Darwin em 1859, e destina-se à obtenção de resultados ótimos do ponto de vista econômico.

### **1.3 OBJETIVO GERAL**

O objetivo do presente trabalho é mostrar que a utilização de programas de otimização envolvendo algoritmos genéticos é uma forma viável e segura para se trabalhar em áreas específicas da engenharia civil, mais precisamente na área de estruturas. Além disso, avaliar o emprego dos algoritmos genéticos como uma ferramenta essencial para a realização de processos de otimização de volumes de elementos estruturais submetidos a carregamentos axiais de compressão ao longo de seu eixo e mostrar que os resultados obtidos sustentam a ideia que a aplicação do método proposto pode ser empregada com segurança, obtendo como resultado volumes finais mais econômicos.

### **1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Estabelecer um modelo de otimização para a obtenção de volumes ótimos em problemas envolvendo estruturas submetidas a carregamento axial de compressão;
- Verificar o comportamento do algoritmo genético ao se trabalhar com elementos de seções transversais variadas;
- Obter volumes finais mais econômicos para os elementos estruturais;
- Avaliar o cumprimento dos fatores de segurança de projeto;
- Verificar a convergência da solução; e
- Fazer comparações entre os resultados obtidos com o uso do programa de otimização e os valores de referência constantes na literatura.

## **2. REVISÃO DE LITERATURA**

Nos itens 2.1 a 2.4 serão apresentados os referenciais teóricos empregados para o desenvolvimento do presente trabalho. Em primeiro momento será apresentado o conteúdo referente ao elemento estrutural de interesse, pilares. Em seguida será abordada a explanação acerca da técnica de otimização utilizada, os algoritmos genéticos. Posteriormente será apresentado o modelo de cálculo para determinação dos volumes de estruturas submetidas a carregamentos de compressão axial, finalizando com uma abordagem referente ao modelo real de carregamento que será empregado para confirmação e verificação do programa de otimização criado.

### **2.1 PILARES**

A NBR 6118/2014 – Projeto de estruturas de concreto - Procedimento, especifica estruturas do tipo pilar como sendo:

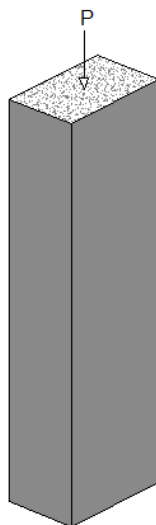
Elementos lineares de eixo reto, usualmente dispostos na vertical, em que as forças normais de compressão são preponderantes.

Carvalho (2013) defini pilar como:

Um elemento estrutural geralmente vertical (em algumas situações pode ser inclinado) e recebe ações predominantemente de compressão. São elementos de grande importância estrutural pois recebem cargas das vigas ou lajes e as conduzem para as fundações.

A figura 1 traz uma ilustração hipotética de uma estrutura do tipo pilar, com a carga aplicada  $P$  correspondendo à força normal de compressão mencionada na NBR 6118/2014.

Figura 1 – Ilustração de uma estrutura do tipo pilar.



Fonte: O autor.

Carvalho (2013) afirma que os pilares têm forma prismática ou cilíndrica, sendo usuais seções transversais do tipo quadrada, retangular ou circular, e que uma de suas dimensões (comprimento) é bem maior se comparado com as demais. São tratados como elementos lineares e, geralmente, isolados.

Pinheiro (2005), citando a NBR 6118/2014, afirma que pilares são elementos estruturais lineares de eixo reto, usualmente dispostos na vertical, em que as forças normais de compressão são preponderantes e cuja função principal é receber as ações atuantes nos diversos níveis e conduzi-las até as fundações.

Pinheiro (2005) comenta ainda que, junto com as vigas, os pilares formam os pórticos que na maior parte dos edifícios são responsáveis por resistir às ações verticais e horizontais e garantir a estabilidade global da estrutura. As ações verticais são transferidas aos pórticos pelas estruturas dos andares, e as ações horizontais decorrentes da influência do vento são levadas aos pórticos pelas paredes externas.

De modo geral, pilares são elementos pensados para compor a estrutura física de uma edificação, dando suporte à transferência de carregamentos impostos, influenciando na estética dos ambientes e proporcionando conforto quanto à segurança e ao uso de qualquer espaço de trabalho. Podem ser confeccionados com os mais variados tipos, desde concreto armado (concreto + aço), aço ou com elementos naturais, como rochas ou madeira.

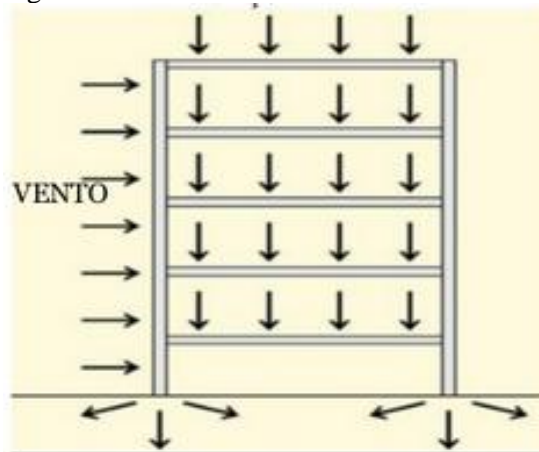
### 2.1.1 Carregamentos sobre os pilares

Devido ao sistema construtivo adotado na grande maioria obras de edificação, sistema de construção com pilar-viga-laje, o caminho de ação das cargas obedece a critérios bastante específicos.

Pinheiro (2005) comenta que a transferência de cargas em uma estrutura iniciasse a partir das lajes. As lajes recebem as cargas permanentes (peso próprio, revestimentos etc.) e as variáveis (pessoas, máquinas, equipamentos etc.) e as transmitem para as vigas de apoio. As vigas, por sua vez, além do peso próprio e das cargas das lajes, recebem também cargas de paredes dispostas sobre elas, além de cargas concentradas provenientes de outras vigas, levando todas essas cargas para os pilares em que estão apoiadas. Os pilares recebem as cargas dos andares superiores, acumulam as reações das vigas em cada andar e conduzem esses esforços até as fundações.

A figura 2 ilustra o esquema de transferência de cargas em uma estrutura.

Figura 2 – Transferência das cargas atuantes em uma estrutura.



Fonte: BARROS (2011)

Quando se trabalha com edifícios de múltiplos andares as cargas dos pilares de cada pavimento recebem valores proporcionais ao nível do pavimento em que estão alocados, sendo essas cargas empregadas para o dimensionamento de cada tramo do pilar e seu valor cumulativo utilizado no cálculo de dimensionamento da fundação, CARVALHO (2013).

## 2.1.2 Características Geométricas

### 2.1.2.1 Dimensões mínimas

Para elementos de concreto armado, a NBR 6118/2014, seção 13.2, estabelece que os elementos estruturais devem possuir dimensões mínimas com o objetivo de evitar um desempenho inaceitável e propiciar condições de execução adequadas.

O item 13.2.3 da referida norma estabelece ainda que a seção transversal de pilares e pilares-parede maciços, qualquer que seja a sua forma, não pode apresentar dimensão menor que 19 cm. Em casos especiais, permite-se a consideração de dimensões entre 19 e 14 cm, desde que se multipliquem os esforços solicitantes de cálculo a serem considerados no dimensionamento por um coeficiente adicional  $\gamma_n$ . Em qualquer caso, não se permite pilar com seção transversal de área inferior a 360 cm<sup>2</sup>.

A tabela 1 traz os valores normativos a serem empregados para adoção do coeficiente  $\gamma_n$  no cálculo de dimensionamento de estruturas de concreto armado convencionais.

Tabela 1 – Valores do coeficiente adicional  $\gamma_n$  para pilares.

b (cm)	≥19	18	17	16	15	14
$\gamma_n$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25

Fonte: NBR 6118/2014.

De forma simplificada os valores mostrados na tabela 1 podem ser obtidos através da expressão geral para determinação do coeficiente  $\gamma_n$ .

$$\gamma_n = 1,95 - 0,05b \quad (1)$$

em que :

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \text{coeficiente de majoração adicional; e} \\ b &= \text{menor dimensão da seção transversal, expressa em centímetros (cm)} \end{aligned}$$

Pinheiro (2005), citando a NBR 6118/2014, item 18.5, estabelece ainda que todas as recomendações referentes aos pilares são válidas nos casos em que a maior dimensão da seção transversal não exceda cinco vezes a menor dimensão ( $h \leq 5$ ).

### 2.1.2.2 Comprimento Equivalente

A NBR 6118/2014, item 15.6, estabelece que o comprimento equivalente de qualquer pilar, suposto vinculado em ambas extremidades, deve ser o menor entre os seguintes valores:

$$\begin{cases} \ell_e = \ell_0 + h \\ \ell_e = \ell \end{cases} \quad (2)$$

em que:

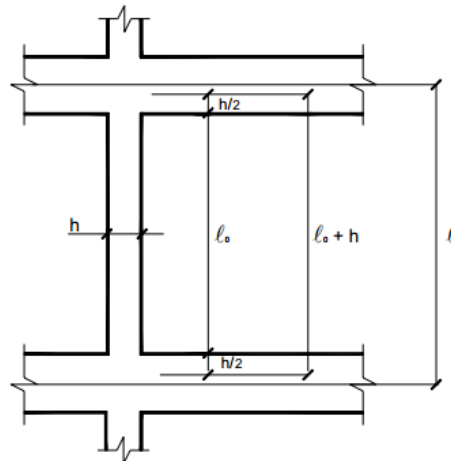
- $\ell_e$  = comprimento equivalente do pilar;
- $\ell_0$  = distância entre as faces internas dos elementos estruturais, supostos horizontais, que vinculam o pilar;
- $h$  = altura da seção transversal do pilar, medida no plano da estrutura em estudo; e
- $\ell$  = distância entre os eixos dos elementos estruturais aos quais o pilar está vinculado.

Pinheiro (2005) afirma ainda que, no caso de pilares engastados na base e livre no topo, o comprimento equivalente do elemento estrutural é igual a duas vezes a distância entre os eixos dos elementos estruturais aos quais o pilar está vinculado, ou seja,

$$\ell_e = 2\ell \quad (3)$$

A figura 3 traz uma ilustração representativa dos limites existentes para cada uma das distâncias marcadas nas equações 2 e 3 considerando um sistema convencional pilar-viga como constante na NBR 6118/2014.

Figura 3– Distâncias  $\ell_0$  e  $\ell$ .



Fonte: PINHEIRO (2005).

## 2.2 MÉTODO DOS ALGORITMOS GENÉTICOS

O desenvolvimento das primeiras abordagens empregadas utilizando simulações computacionais voltadas para a criação de sistemas que representassem o comportamento dos seres vivos iniciou-se por volta dos anos 50 e 60 através dos estudos de pesquisadores das áreas da genética e da biologia. A partir da década de 1960, no entanto, com as pesquisas

de John H. Holland, os primeiros conceitos e aplicações empregando algoritmos genéticos teve início. Holland estudou a fundo as teorias evolucionistas propostas por Charles Darwin e as empregou para desenvolver um método computacional eficiente e intimamente ligado aos processos evolutivos. (HOLLAND, 1992)

A partir dos anos 80 as teorias referentes aos processos evolutivos associados com sistemas computacionais passam a ter maior repercussão quando David Edward Goldberg, antigo aluno de Holland, apresenta uma série de resultados de aplicação dos algoritmos genéticos ligados a diversos campos de trabalho, como o setor industrial. Em 1989 Goldberg publica seu livro, intitulado *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, que fornece uma base científica sólida para a área, trazendo em seu escopo os resultados das aplicações e metodologias utilizadas em suas pesquisas, utilizando os conceitos evolucionários propostos por Darwin e aplicações realizadas de forma mais aprofundadas por John Holland.

A partir dos trabalhos publicados por Goldberg o conhecimento a respeito dos mecanismos de simulação computacional dos processos evolutivos empregando algoritmos genéticos passam a ter maior aceitação tanto por parte de pesquisadores como pela sociedade científica, e com isso têm seu emprego ampliado e empregado nas mais diversas áreas do conhecimento. (GOLDBERG, 1989)

Algumas das áreas do conhecimento em que os algoritmos genéticos podem ser aplicados foram mencionadas por Coley (1998):

- Processamento de imagens;
- Tecnologia a lazer;
- Medicina;
- Aeronáutica;
- Robótica;
- Estética;
- Reconhecimento fácil;
- Matemática; entre outros.

Michalewicz (1992) explica que um algoritmo genético trabalha seguindo cinco componentes básicos em qualquer problema.

1. Uma representação para potenciais soluções para o problema;
2. Uma maneira de criar uma população inicial de soluções potenciais;

3. Uma função de avaliação que desempenha o papel do meio ambiente, estabelecendo critérios para definição de escolha dos indivíduos como possíveis candidatos para obtenção da solução dos problemas;
4. Operadores genéticos que alterem a composição dos descendentes; e
5. Valores de vários parâmetros que o algoritmo genético usa (tamanho da população, probabilidade de aplicação dos operadores genéticos, etc.).

No item 2.2.1 é apresentada uma explanação a respeito da teoria que inspirou pesquisadores das mais diversas áreas e que levou às primeiras abordagens de emprego das técnicas envolvendo algoritmos genéticos.

### **2.2.1 Teoria da Evolução**

Um dos grandes marcos na história da ciência foi a proposição da teoria da evolução das espécies, proposta por Charles Darwin em 1859 e que foi publicada em seu livro intitulado *The Origin of the Species*. Neste trabalho revolucionário Darwin explica as causas, efeitos e consequências que levaram espécies animais, classificadas em uma mesma classe biológica, a adquirirem características diferenciadas quando incorporadas em ambientes com condições climáticas, fauna e flora distintos. Segundo Darwin (1859), todo indivíduo, seja ele espécie animal ou vegetal, tem a capacidade de assumir as características do ambiente ao qual é inserido, com a finalidade de adquirir condições vantajosas para sua sobrevivência, adaptando-se às mudanças do local e proporcionando garantias para a perpetuação de seus descendentes.

Em seu livro, Darwin traz uma rápida ilustração da aplicação de sua teoria para o caso da população de uma espécie de pássaros habitantes das ilhas Galápagos, na costa do Equador. Darwin descobriu que espécies similares de tentilhões, mas não idênticas, habitavam ilhas próximas a Galápagos. Além disso ele percebeu que cada espécie de tentilhão estava bem adaptada para seu ambiente e sua função. Por exemplo, espécies que comiam sementes grandes tendiam a ter bico largo e duro enquanto aquelas que comiam insetos tinham bico fino e afiado. Darwin observou então que os tentilhões, e outros animais, encontrados nas ilhas Galápagos eram similares às espécies do vizinho continente do Equador, mas diferentes dos encontrados no resto do mundo.

De acordo com suas observações e conclusões, Darwin considerou o que foi por ele chamado de Seleção Natural das espécies. Segundo essa teoria, os seres vivos buscam de todas as formas sobreviver no habitat em que é inserido. Pelo desenvolvimento dos instintos

de sobrevivência, as espécies sempre, ou quase sempre, encontram condições favoráveis para gerar descendentes e fazer sua população crescer. Através da combinação genética os indivíduos mais bem adaptados em uma população conseguem passar suas características para os descendentes, mantendo as informações que proporcionaram sua capacidade de adequação ao ambiente em que se desenvolveu, garantindo que a informação genética que tornou possível o desenvolvimento da população não seja perdido.

### 2.2.2 O Algoritmo Genético

Os algoritmos genéticos são um ramo da computação que se baseia na teoria da evolução das espécies e são empregados para tratar problemas complexos, muitas vezes de difícil solução quando utilizados métodos convencionais de cálculo, e são desenvolvidos para trabalhar com a procura de soluções ótimas dentro de um espaço de busca pré-definido.

Koza (1992) traz uma boa definição de um algoritmo genético:

O algoritmo genético é um algoritmo matemático altamente paralelo que transforma um conjunto (população de objetos matemáticos individuais), cada um com um valor de peso associado, em uma nova população (i.e., a próxima geração), usando operadores padrão após o princípio Darwinista de reprodução e sobrevivência do mais apto e depois ocorrendo operações genéticas naturalmente (notadamente recombinação sexual).

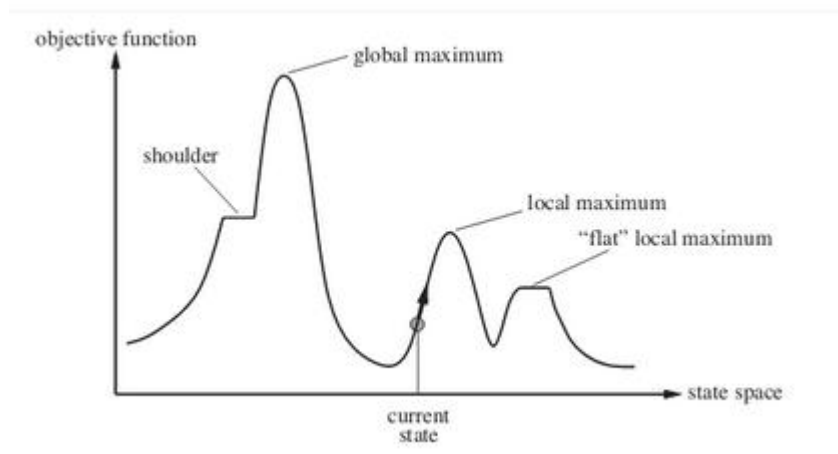
Adeli e Sarma (2006) trazem uma explicação sucinta sobre as características de um algoritmo genético simples:

- Todas as operações do algoritmo genético funcionam com strings binárias de comprimento finito (cromossomos) em vez de conjuntos de parâmetros reais, resultando em um algoritmo de busca de ponto finito;
- Algoritmos genéticos consideram um grupo de pontos no espaço de busca em muitas iterações, chamando uma população de pontos;
- Algoritmos genéticos usam uma busca aleatória baseada na informação prévia para orientar a pesquisa, em vez de pesquisa em gradiente, de modo que a informação derivada e o tamanho do passo não são considerados;
- Os algoritmos genéticos devem funcionar em um espaço limitado para codificar os parâmetros; e
- Algoritmos genéticos não são algoritmos do tipo hill-climbing. Os problemas de escalada local são eliminados nesses algoritmos. Portanto, a probabilidade de ser preso em um mínimo local é reduzida.

O termo hill-climbing refere-se ao fato de que o algoritmo genético não irá parar de procurar por soluções melhores mesmo encontrando uma solução ideal dentro do espaço de soluções. Neste ponto, eles se parecem com a evolução natural, que só porque encontrou um indivíduo que é instantaneamente o melhor de um certo grupo não pára de procurar outros indivíduos ainda melhores. (LINDEN, 2012)

A figura 4 mostra uma ilustração do espaço de busca gerado ao fazer uso de uma determinada função de avaliação. O gráfico da função estudada possui pontos máximos locais e por esta razão o a poderá ocorrer uma escolha mascarada da solução final, fazendo com que o resultado retornado não seja a melhor solução para o problema. Devido a este tipo de ocorrência o algoritmo genético continuará procurando pela existência de novas soluções, mesmo que o valores obtidos sejam os melhores em uma determinada iteração.

Figura 4 – Gráfico de soluções gerado pela função de avaliação.



Fonte: FARIA (2015).

Como mencionado por LINDEN (2012), na evolução natural isto também decorre de circunstâncias que mudam de um momento para outro. Uma bactéria pode ser a melhor em um ambiente livre de antibióticos mas quando estes são usados, outras que antes eram menos fortes tornam-se as únicas sobreviventes por serem as únicas adaptadas.

Na seção 2.2.3 são apresentados alguns dos termos empregados nos estudos dos algoritmos genéticos e sua analogia com o correspondente na área da genética.

### 2.2.3 Terminologia

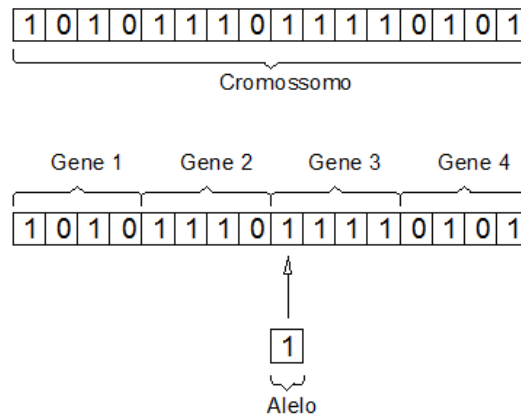
Os algoritmos genéticos são um tratamento computacional do processo de evolução natural dos seres vivos e por esta razão alguns termos empregados na formulação dos

parâmetros utilizados no desenvolvimento do algoritmo seguem uma analogia com alguns dos termos empregados na biologia. De acordo com Heitkoetter e Beasley (1995), alguns dos termos básicos empregados para os algoritmos genéticos são:

- **Cromossomo:** é uma estrutura de dados que carrega a informação genética do indivíduo, os genes. Estas informações podem ser armazenadas, por exemplo, através de uma representação binária ou como uma rede de inteiros que representa um número de ponto flutuante;
- **Gene:** é uma subseção de um cromossomo que usualmente codifica o valor de um simples parâmetro;
- **Alelo:** é o valor individual que caracteriza a informação de um gene. Por exemplo, para uma representação binária cada alelo poderá assumir o valor 0 ou 1, e para uma representação por ponto flutuante, cada alelo poderá assumir valores variando de 0 a 9;
- **Genótipo:** representa uma solução potencial para um problema, e é basicamente a cadeia de valores escolhidos pelo usuário, também chamado cromossomo;
- **Fenótipo:** é o significado de um cromossomo particular, definido externamente pelo usuário;
- **População:** é o conjunto de indivíduos, informado pelo usuário, que irá ser analisado para determinação das melhores soluções no espaço de soluções de cada problema;
- **Geração:** corresponde à quantidade de iterações que o algoritmo genético irá efetuar para determinação das soluções. O tamanho da geração poderá se tornar tanto maior quanto mais complexo for o problema em estudo.

A figura 5 traz uma representação fictícia para um cromossomo, um gene e um alelo, identificando separadamente a base constituinte de cada informação genética.

Figura 5 – Representação de um cromossomo, gene e alelo.



Fonte: Adaptado de Sivanandam (2008).

De forma resumida os parâmetros de análise do algoritmo genético podem ser descritos como indicado na tabela 2. (LINDEN, 2012)

Tabela 2 – Nomenclatura de diferenciação entre as áreas da genética e dos algoritmos genéticos.

Linguagem natural	GA
Cromossomo	Indivíduo
Gene	Característica
Alelo	Valor
Genótipo	Estrutura
Fenótipo	Conjunto de parâmetros

Fonte: LINDEN (2012).

#### 2.2.4 População Inicial

De acordo com Sivanandam *et al* (2008), uma população é uma coleção de indivíduos. Além disso é constituída por uma série de indivíduos que estão sendo testados a partir de parâmetros fenotípicos que definem o indivíduo e de informações que caracterizam o espaço de pesquisa.

O tamanho da população de indivíduos é um parâmetro que deve ser definido em cada problema e irá resultar em uma busca mais criteriosa em cada caso. Segundo Linden (2012), a definição de uma população muito pequena, abaixo de 40 indivíduos, poderia acarretar em um espaço de busca deficiente e com variedade genética muito pequena. Desse modo o algoritmo não teria a capacidade de encontrar boas soluções para o problema. Vale salientar aqui que a definição de um mínimo para a população também é função do problema

em estudo, ficando a cargo do programador encontrar, por experimentação, o tamanho mínimo correspondente para a sua população.

O limite máximo da população também é um critério que irá depender da função de avaliação de cada problema. Populações muito grandes exigirão maior poder de processamento para rodar cada iteração, mas provocará uma melhora na performance do algoritmo. Linden (2012) estabelece um intervalo entre 50 e 70 indivíduos por população para a solução dos problemas, devendo atentar-se, no entanto, para a complexidade de cada problema.

### **2.2.5 Processo de Seleção**

De acordo com Sivanandam *et al* (2008), a seleção é o processo de escolha de dois pais da população para cruzamento. O objetivo da seleção é enfatizar os indivíduos aptos na população na esperança de que suas fontes tenham maior aptidão física, assim os cromossomos são selecionados da população inicial e escalonados para serem pais no processo de reprodução que dará origem aos indivíduos da geração posterior.

Sivanandam *et al* (2008) afirma ainda que a seleção é um método que escolhe aleatoriamente os cromossomos da população de acordo com sua função de avaliação. Quanto maior a função de fitness, mais chances um indivíduo tem para ser selecionado.

Linden (2012) comenta, no entanto, que o processo de seleção deve ser realizado de tal forma que a escolha dos indivíduos seja feita sem que haja a completa exclusão dos indivíduos menos aptos, de modo que haja um balanço entre os pesos dos indivíduos em cada geração. Isso evitaria a convergência prematura dos resultados e seguiria o princípio Darwinista de reprodução, que afirma que numa população nem sempre os indivíduos mais fortes sobrevivem quando há mudanças nas características do ambiente.

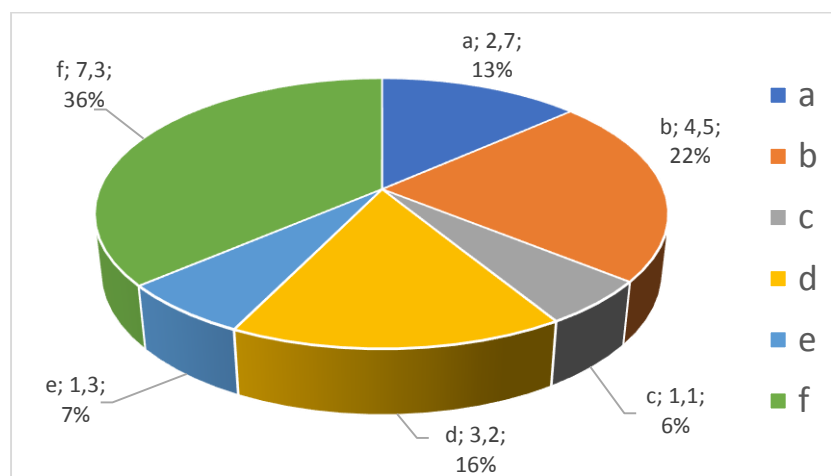
Em algoritmos genéticos basicamente os processos de seleção trabalham seguindo o método da roleta viciada. Neste método cada indivíduo recebe um valor proporcional ao seu peso dentro da população, podendo variar de 0 a 100% do peso total. Desse modo, a probabilidade de um indivíduo ser escolhido vai depender da atribuição de cada peso, indivíduo mais bem adaptados receberão pesos maiores, enquanto indivíduos menos aptos receberão pesos menores. (COLEY, 1998)

A atribuição de pesos escalonados dentro de uma população, com os indivíduos mais bem adaptados recebendo pesos maiores, privilegiará a escolha destes indivíduos mas não excluirá a possibilidade de escolha dos indivíduos menos aptos, o que garante a diversidade das populações e a obtenção de resultados mais refinados como solução dos problemas.

Para o processo de seleção dos indivíduos gera-se um valor aleatório, dentro do espaço limite da roleta (0 a 100%), e o valor sorteado indicará o indivíduo escolhido. Como os indivíduos mais bem adaptados receberão as maiores parcelas da roleta, logo estes terão maiores probabilidades de serem escolhidos, não eliminando, todavia, a probabilidade de escolha dos demais indivíduos.

A figura 6 apresenta uma ilustração do processo de seleção por roleta em que a população formada constitui-se por seis indivíduos (a, b, c, d, e, f) de pesos 2.7, 4.5, 1.1, 3.2, 1.3, e 7.3 respectivamente. No modelo o indivíduo f pode ser considerado o indivíduo de maior alto peso dentro da população, e por esta razão a probabilidade de escolha deste indivíduo no processo de seleção está mais acentuada, 36%. Enquanto isso, o indivíduo c possui a menor performance e assim, terá menores chances de ser escolhido como parte integrante para as próximas gerações, com 6% de probabilidade de seleção. COLEY (1998)

Figura 6 – Processo de seleção por roleta.



Fonte: Adaptado de Coley (1998)

### 2.2.6 Função de Avaliação (Fitness)

A função de avaliação é a maneira utilizada pelos algoritmos genéticos para determinar a qualidade de um indivíduo como solução do problema em questão (LINDEN, 2012). Genericamente cada problema irá admitir uma função de avaliação específica para sua solução, sendo, portanto, muito importante que sejam conhecidos os parâmetros e restrições de cada situação a ser estudada e em cima disto definir, de forma clara e objetiva, a equação da função que governará o problema.

Sivanandam *et al* (2008) afirma que a função de avaliação indicará os possíveis valores para a solução desejada dentre os valores existentes em um espaço de busca pré-

definido, sendo bastante comum a possibilidade de encontrar indivíduos bons, mas não tão bons como se espera devido à existência de pontos máximos e mínimos locais correspondentes à função ser estudada.

Adeli e Sarma (2006) comentam que os algoritmos genéticos trabalham com o objetivo de maximizar o peso da função de avaliação e por esta razão a possibilidade de se estabelecer em um máximo local é relativamente alta.

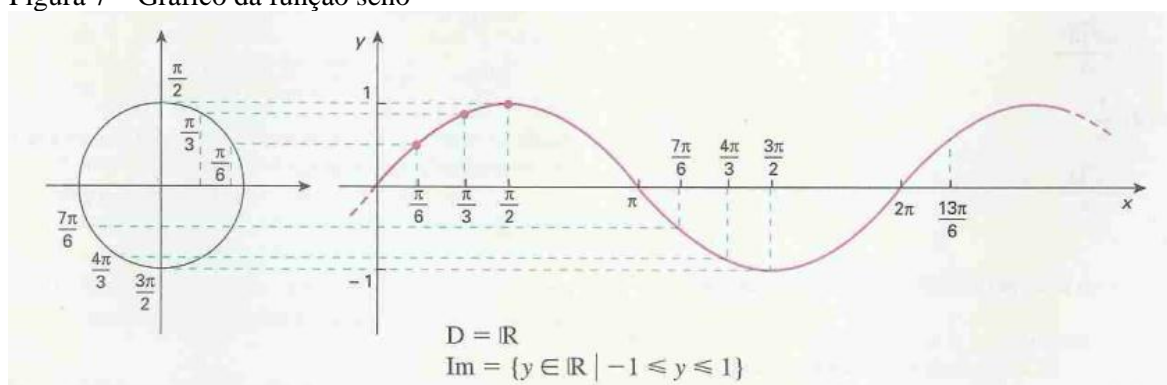
Considere por exemplo a função mostrada a seguir,

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

De acordo com Leithold (1994) a função mostrada está definida para todo o conjunto dos números reais, possuindo contradomínio no intervalo fechado  $[-1,1]$ . Além disso a função é periódica, ou seja, os valores pertencentes ao contradomínio repetem-se em intervalos definidos.

Os pontos máximos representativos da função estão relacionados ao conjunto de pontos do gráfico correspondentes a  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , com  $k \in \{2n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Assim, para  $x = \frac{\pi}{2}$ , por exemplo, a função apresenta um ponto de máximo global igual a 1 e para  $x = \frac{3\pi}{2}$  a função apresenta um mínimo global igual a -1, como ilustrado na figura 7.

Figura 7 – Gráfico da função seno



Fonte: Paiva (2005)

Então, para empregar a função mencionada dentro do algoritmo genético por exemplo, espera-se encontrar como resultado um valor máximo positivo igual ou muito próximo de 1, definida para o intervalo fechado  $[-\pi, \pi]$ , o que comprovaria que a função de aptidão baseia-se na busca por pontos máximos, relativos e absolutos, em qualquer problema irrestrito.

O resultado obtido com o teste computacional empregando a função discutida neste tópico, e que foi empregada como sendo a função de aptidão do algoritmo genético criado neste trabalho, consta como parte da seção 4 referente aos resultados e discussões.

### **2.2.7 Elitismo**

Segundo Linden (2012), elitismo é uma pequena alteração no módulo de população que quase não altera o tempo de processamento, mas que garante que a performance do algoritmo genético esteja sempre crescendo com o decorrer das gerações. Linden (2012) afirma ainda que, a ideia básica por trás do elitismo é a de que os  $n$  melhores indivíduos de cada geração não devem “morrer” junto com a sua geração, mas sim passar para a próxima geração para garantir que seus genomas sejam preservados. Desse modo, o processo irá garantir que a próxima geração terá pelo menos um indivíduo igual ao melhor indivíduo da geração atual.

De acordo com Heitkoetter e Beasley (1995) o uso do elitismo garante que o peso máximo da população nunca diminua a partir da primeira geração até a próxima, o que acaba produzindo como resultado uma convergência acentuada da população.

Sivanandam *et al* (2008) comenta também que, no elitismo, o primeiro melhor cromossomo, ou os melhores cromossomos, são copiados para a nova população. Esses indivíduos poderiam ser perdidos caso não fossem selecionados para reproduzir, ou se os operadores de crossover ou mutação os destruíssem durante a aplicação dos operadores genéticos. Os demais são escolhidos pela maneira clássica, através da seleção por sorteio. Essa metodologia de seleção significativamente melhora a performance do algoritmo genético.

### **2.2.8 Operadores Genéticos**

Os operadores genéticos são mecanismos capazes de trabalhar com a mudança e/ou alteração do código genético de cada indivíduo da população, agindo de modo a alterar a informação que os identifica, de modo a obter novos indivíduos com características mais favoráveis à evolução da espécie. Dentre os operadores genéticos mais comuns estão os operadores de cruzamento (crossover) e os operadores de mutação.

Adeli e Sarma (2006) *apud* De Jong (1975), mostram que os valores típicos para os operadores de cruzamento e de mutação são respectivamente 0,8 e 0,005. Valores maiores, ou menores, podem resultar na criação de indivíduos com peso não tão desejados ou com característica semelhante a outros indivíduos da população. Isso poderia acarretar na

estagnação dos valores da população, fazendo os resultados convergirem rapidamente antes de alcançar a solução desejada para o problema.

#### 2.2.8.1 Operador de Cruzamento (Crossover)

A operação de cruzamento consiste em se tomar dois indivíduos (também chamados de pais), escolhidos após aplicados os processos de seleção, e fazer com que a identificação genética de ambos seja combinada e passada a seus descendentes.

O processo ocorre pela definição de um ou mais pontos de corte em comum na estrutura da cadeia de cromossomos de cada um dos dois pais e, pela troca de informações, cada um dos dois filhos gerados passarão a ter uma identificação associada às partes dos pais escolhidos anteriormente. LINDEN (2012)

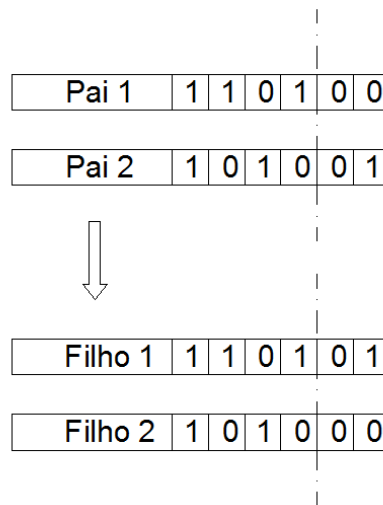
Os operadores genéticos de cruzamento mais comuns são o cruzamento de um ponto e o cruzamento de dois pontos. Existem outros métodos de cruzamento, no entanto, cabe a este projeto trabalhar apenas com os modelos necessários à solução do problema descrito no texto de maneira simples e precisa. Para a solução do problema proposto empregou-se o cruzamento com um ponto de corte.

##### 2.2.8.1.1 Cruzamento de um ponto

A operação básica do cruzamento de um ponto de corte consiste em se tomar a faixa cromossomal de cada um dos dois pais escolhidos e fazer uma separação entre a identificação genética de ambos em um ponto em comum. Cada um dos dois filhos gerados terá associado a ele uma parcela da identificação genética de cada um dos pais escolhidos no processo de seleção. LINDEN (2012)

A figura 8 ilustra o processo de corte descrito, considerando dois cromossomos de representação binária.

Figura 8 - Operador de Cruzamento de um ponto.



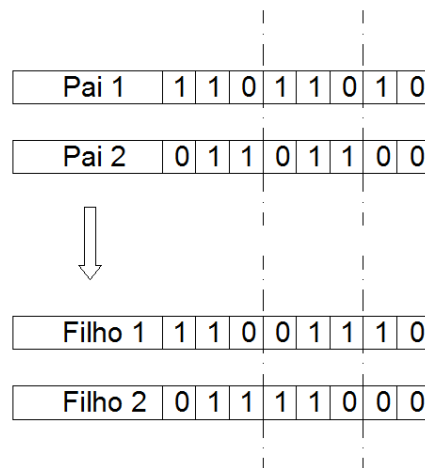
Fonte: SIVANANDAM, et al. (2008).

Após o processo os dois filhos gerados terão em sua codificação ambas as partes da informação genética que levou os dois pais empregados no processo de seleção a serem admitidos como aptos a formarem parte da população, e assim serão fortes candidatos a integrar o conjunto de indivíduos que formarão a população da geração seguinte.

#### 2.2.8.1.2 Cruzamento de dois pontos

Na operação de cruzamento de dois pontos o cromossomo de cada um dos dois pais é subdividido em três partes, de forma aleatória, e os filhos gerados terão herdado a combinação genética da iteração entre as partes obtidas. O processo pode ser observado como ilustrado na figura 9.

Figura 9 - Operador de Crossover de dois pontos.



Fonte: SIVANANDAM, et al. (2008).

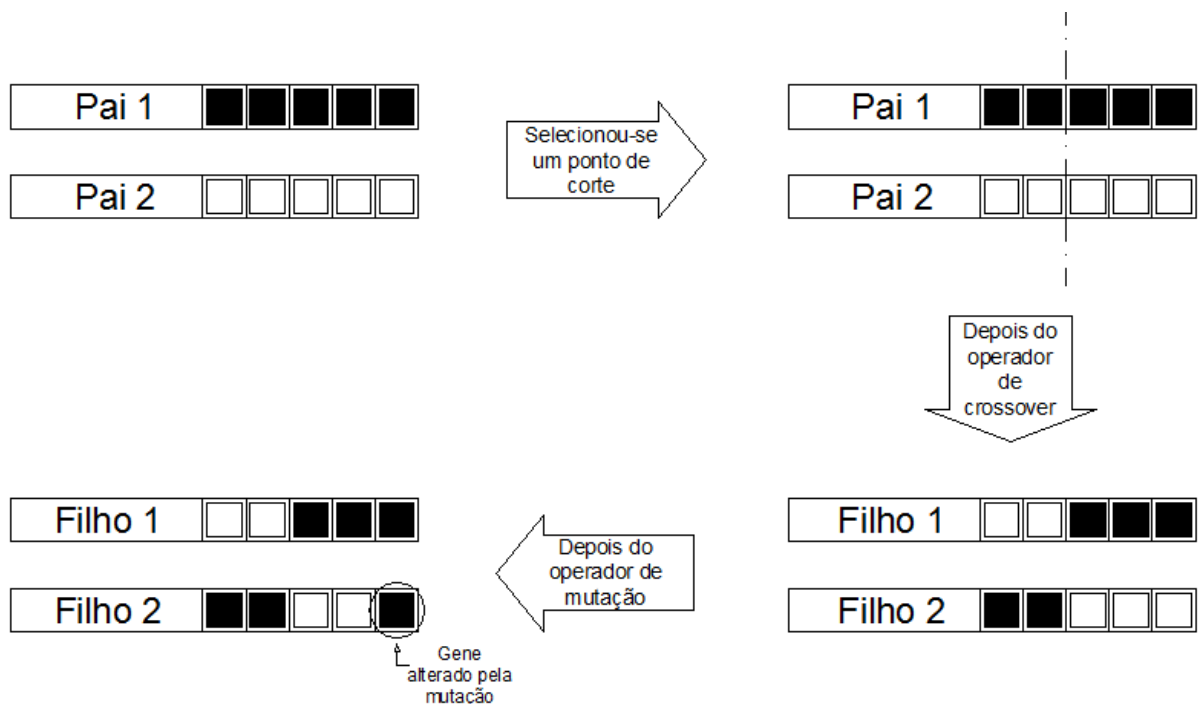
Como para o cruzamento de um ponto, o processo garantirá que os indivíduos gerados possuirão a informação genética que possibilitou seus progenitores desenvolver-se em um ambiente amplamente disputado e concorrido, tendo em sua informação genética a base para que possam continuar desenvolvendo e progredindo com o passar das gerações.

### 2.2.8.2 Operador de Mutação

No processo de mutação ocorre a mudança gene a gene, ou gene por gene, da identidade genética do cromossomo dos pais escolhidos no processo de seleção. A mutação apenas irá ocorrer caso a condição que governa o processo seja negada. De acordo com Linden (2012), a mutação está associada a uma probabilidade extremamente baixa (da ordem de 0,5%), sendo que há a ocorrência do sorteio de um número entre 0 e 1. Caso o número sorteado seja menor do que a probabilidade o operador atuará sobre o gen em questão, alterando-lhe o valor aleatoriamente. O processo é repetido para todos os gens componentes dos dois filhos gerados após o processo de cruzamento.

Na figura 10 é mostrada uma ilustração do processo de ação em conjunto entre um operador de cruzamento de um ponto seguido de um operador de mutação, em um caso hipotético de combinação genética.

Figura 10 - Operador de Cruzamento de um ponto e operador de mutação agindo em conjunto.



Fonte: LINDEN (2012).

### 2.2.9 Procedimento de análise do algoritmo genético

Para demonstrar a funcionalidade e mecanismo de trabalho de um algoritmo genético simples empregou-se como exemplo um problema de maximização de funções, disponibilizado por Coley (1998, p.12).

Considere o problema trivial para maximizar a função,  $f(x)$ , sendo:

$$f(x) = x^2; \text{ para } x \text{ inteiro e } 0 \leq x \leq 4095$$

De acordo com Coley (1998), o procedimento básico empregado pelo algoritmo genético para realizar a busca por soluções para o problema é exemplificado como mostrado a seguir.

1. Forme uma população, de oito cadeias binárias aleatórias e com tamanho igual a doze (ex. 101001101010, 110011001100, ...);
2. Decodifique cada cadeia binária para um inteiro  $x$  (ex. 000000000111 implica em  $x = 7$ , 000000000000 = 0, 111111111111 = 4095);
3. Teste esses números como soluções para o problema  $f(x)=x^2$  e atribua um peso para cada indivíduo igual ao valor de  $f(x)$  (ex. a solução  $x = 7$  tem um peso de  $7^2 = 49$ );
4. Selecione a melhor metade (aqueles com maior aptidão) da população para ir à próxima geração;
5. Aleatoriamente escolha pares de indivíduos, chamados pais, (com cada indivíduo selecionado exatamente uma vez) para serem submetidos a processos de cruzamento genético, crossover. Com cada um dos pares escolha pontos de corte em comum na cadeia de caracteres e faça a mudança entre eles, criando novos pares de cadeias, chamados de filhos;
6. Aplique mutação para os filhos;
7. Essas novas cadeias, que serão os parentes, ou pais, para a formação da nova população, terão o mesmo módulo da população anterior, com oito membros de acordo com o passo 1;
8. Retorne ao passo 2 e repita até que se tenha passo cinquenta gerações.

Segundo Coley (1998) o procedimento apresentado corresponde a uma análise para a solução de um algoritmo simples. Problemas mais complexas necessitariam de análises

mais criteriosas para estabelecer a ordem e probabilidades de escolha dos parâmetros, principalmente cruzamento e mutação.

Como pode ser notado nos processos descritos, o algoritmo genético é um método altamente randômico, sendo seus parâmetros e procedimentos resolvidos através de escolhas aleatórias. As soluções, no entanto, sempre caminham no sentido de encontrar a solução final mais favorável para os problemas, mesmo que as condições de análise as tornem bastante onerosas.

No item 2.3 é apresentado o modelo de cálculo empregado para a determinação das soluções referentes ao problema tratado neste trabalho, com as definições e considerações que foram utilizadas para a escolha do método proposto.

## **2.3 MODELO DE CÁLCULO PARA DETERMINAÇÃO DOS VOLUMES ÓTIMOS**

O modelo de cálculo empregado para a criação e aplicação do algoritmo genético proposto neste projeto foi desenvolvido e disponibilizado por Coello (2005), em seu trabalho intitulado *Optimal design of axially loaded non-prismatic columns*. No trabalho desenvolvido, Coello (2005) traz uma formulação teórica referente a estruturas submetidas aos esforços de compressão quando da ocorrência de aplicação de carregamentos axiais ao longo de seu eixo.

### **2.3.1 Definição da equação governante do problema**

Segundo Coello (2005), a função que governa os problemas de colunas submetidas a carregamentos axiais de compressão ao longo do eixo é dada pela equação 4 mostrada abaixo.

$$EIy'' + Py = 0 \tag{4}$$

em que:

- E = módulo de elasticidade;
- I = momento de inércia;
- P = carga axial; e
- y = função que representa a esbeltez da coluna.

De acordo com Rosa (2013), a função diferencial de segunda ordem mostrada na equação 4 pode ser expandida por uma série de Taylor, de modo que a derivada da função assume a forma indicada na equação 5.

$$f'' = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} \quad (5)$$

em que:

- $f''$  = segunda derivada da função  $f$ ;  
 $y$  = variável do problema; e  
 $h$  = tamanho do intervalo  $x_{i+1} - x_i$ .

Substituindo a equação 5 na equação 4 e desenvolvendo os cálculos para  $i \in [2,4]$ , obtém-se:

$$EIy'' + Py = 0 \Rightarrow \frac{EI(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})}{h^2} + Py_i = 0 \quad i \in \{2,3,4\}$$

O modelo de Coello (2005), indicado na figura 11, fornece como condições iniciais de contorno  $y_1 = 0$  e  $y_3 = y_5$ . Desse modo tem-se:

Para  $i=2$

$$\frac{EI_2y_{2-1} - 2EI_2y_2 + EI_2y_{2+1}}{h^2} + Py_2 = 0$$

$$\frac{-2EI_2y_2 + EI_2y_3}{h^2} + Py_2 = 0$$

Para  $i=3$

$$\frac{EI_3y_{3-1} - 2EI_3y_3 + EI_3y_{3+1}}{h^2} + Py_3 = 0$$

$$\frac{EI_3y_2 - 2EI_3y_3 + EI_3y_4}{h^2} + Py_3 = 0$$

Para  $i=4$

$$\frac{EI_4y_{4-1} - 2EI_4y_4 + EI_4y_{4+1}}{h^2} + Py_4 = 0$$

$$\frac{2EI_4y_3 - 2EI_4y_4}{h^2} + Py_4 = 0$$

Os resultados obtidos podem ser expressos sob uma forma matricial como indicado na equação 6.

$$\frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} -2I_2 & I_2 & 0 \\ I_3 & -2I_3 & I_3 \\ 0 & 2I_4 & -2I_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

em que:

- $E$  = módulo de elasticidade;  
 $h$  = tamanho do intervalo  $x_{i+1} - x_i$ ;

I = módulo de elasticidade; e  
P = carga aplicada.

O sistema mostrado na equação 6 pode ser reescrito e desenvolvido através da aplicação de determinante como indicado na equação 7.

$$\begin{vmatrix} \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_2}\right) & 1 & 0 \\ 1 & \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_3}\right) & 1 \\ 0 & 2 & \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_4}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

O cálculo do determinante da matriz pela regra dos cofatores leva à forma linear mostrada na equação 8.

$$\frac{P^3 h^6}{E^3 I_2 I_3 I_4} - 2 \frac{P^2 h^4}{E^2} \left( \frac{1}{I_2 I_3} + \frac{1}{I_3 I_4} + \frac{1}{I_2 I_4} \right) + \frac{Ph^2}{E} \left( \frac{2}{I_2} + \frac{4}{I_3} + \frac{3}{I_4} \right) - 2 = 0 \quad (8)$$

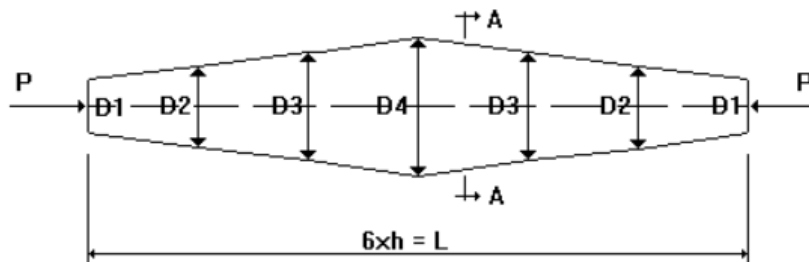
A sequência de cálculos realizados para chegar à forma indicado na equação 8 está disposta no apêndice A deste texto.

A equação 8 será empregada para definição das condições restritivas de cada problema (fator de segurança e tolerância das dimensões físicas do elemento), sendo um ponto de verificação para aplicação, ou não, dos fatores de penalidade empregados em cada caso. Como a equação foi obtida a partir do cálculo de um determinante, a solução da equação deve retornar como resultado valores iguais ou muito próximos de zero.

### 2.3.2 Modelo de Cálculo para estruturas carregadas axialmente por compressão

Para a resolução do problema Coello (2005) considerou uma coluna, de comprimento L, subdividida em seis segmentos de mesmo comprimento. O modelo ilustrativo do elemento estrutural empregado para definição do problema é mostrado na figura 11.

Figura 11 – Modelo empregado para o estudo do carregamento axial em colunas.



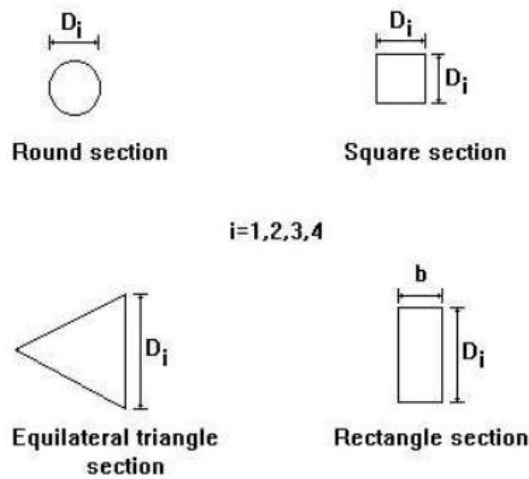
Fonte: COELLO (2005).

Na Figura 11 as variáveis D1, D2, D3 e D4 representam os diâmetros, ou lados, da seção transversal do elemento estrutural; P representa o carregamento axial aplicado; L corresponde ao comprimento total da peça; e h é o valor correspondente ao número de divisões do elemento.

De acordo com o modelo proposto, as seções a serem analisadas serão do tipo: circular, quadrada, retangular e triangular.

A figura 12 traz os tipos de seções empregadas no estudo.

Figura 12 – Tipos de seção transversal empregadas no modelo.



Fonte: COELLO (2005).

De acordo com Coello (2005), para elementos com seção transversal circular e seções em forma de polígonos regulares, o momento de inércia I será dado pela equação 9 mostrado abaixo.

$$I_i = \alpha D_i^4 \tag{9}$$

em que:

- $I_i$  = momento de inércia;
- $D_i$  = diâmetro ou lado da seção transversal; e
- $\alpha$  = coeficiente adimensional obtido das equações gerais da resistência dos materiais.

O valor de  $\alpha$  proposto por Coello (2005) assume os valores correspondentes mostrados na tabela 3.

Tabela 3 – Valores do coeficiente  $\alpha$ .

Seção Circular	Seção Quadrada	Seção Triangular
$\frac{\pi}{64}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{\sqrt{3}}{96}$

Fonte: COELLO (2005).

Para o caso de seção triangular Coello (2005) considerou a peça como sendo um triângulo equilátero de dimensão  $D_i$  como mostrado na figura 12.

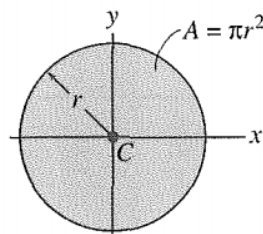
Os valores mostrados na tabela 3 são uma abreviação dos valores totais de cada módulo de inércia das seções analisadas. No item seguinte são mostrados os procedimentos que levaram à obtenção dos resultados constantes na referida tabela.

### 2.3.2.1 Comprovação dos valores da constante $\alpha$

Para a comprovação dos valores constantes na tabela 3 propostos por Coello (2005) buscou-se como referência as informações disponibilizadas por Hibbeler (2010) em seu livro intitulado *Resistência dos Materiais*, na seção referente às propriedades geométricas de elementos de área mais comumente empregadas em trabalhos de engenharia.

- Para elementos de seção circular

Figura 13 – Inércia de elementos de seção circular.



$$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$$

Área circular

Fonte: HIBBELER (2010).

Desenvolvendo os cálculos com a substituição do raio da circunferência pelo correspondente valor em função do diâmetro da seção na fórmula do momento de inércia obtém-se:

$$I_x = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{4} \pi \left( \frac{Di}{2} \right)^4 = \frac{1}{4} \pi \frac{Di^4}{16} = \frac{\pi}{64} Di^4$$

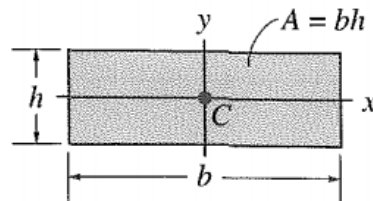
Ou,

$$I_x = \alpha Di^4$$

Para os demais elementos seguiu-se a mesma analogia de cálculo.

- Para elementos de seção quadrada

Figura 14 – Inércia de elementos de seção quadrada.



$$I_x = \frac{1}{12} bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} hb^3$$

Fonte: HIBBELER (2010).

Fazendo  $h=b=Di$  na equação da inércia de uma seção retangular como mostrado acima, obtém-se a forma da equação para uma seção transversal do tipo quadrada.

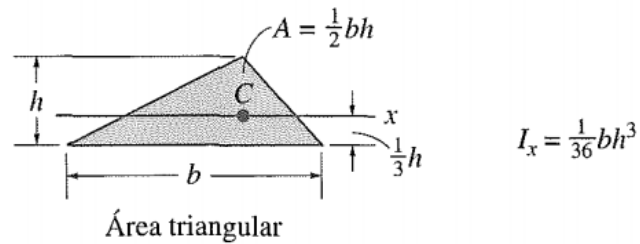
$$I_x = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} b b^3 = \frac{1}{12} b^4 = \frac{1}{12} Di^4$$

Ou,

$$I_x = \alpha Di^4$$

- Para elementos de seção triangular

Figura 15 – Inércia de elementos de seção triangular.



Fonte: HIBBELER (2010).

Considerando o elemento triangular como sendo do tipo equilátero, como proposto por Coello (2005), a altura do elemento será dada por:

$$D^2 = h^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{D^2}{4}$$

$$h^2 = D^2 - \frac{D^2}{4} = \frac{3D^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3D^2}{4}} = \frac{D\sqrt{3}}{2}$$

Desse modo, o cálculo do momento de inércia será dado como mostrado a seguir.

$$I_x = \frac{1}{36}bh^3 = \frac{1}{36}Dh^3 = \frac{1}{36}D\left(\frac{D\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{36}DD^3\frac{(\sqrt{3})^3}{8} = \frac{1}{36}D^4\frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{96}D^4\sqrt{3}$$

$$I_x = \frac{\sqrt{3}}{96}D_i^4$$

Ou,

$$I_x = \alpha D_i^4$$

No caso de seções retangulares, em que a largura  $b$  é tomada como constante ao longo do comprimento da coluna, o módulo de inércia é dado pela equação 10.

$$I_i = \frac{bD_i^3}{12} \quad , i = 1,2,3,4 \quad (10)$$

em que:

- $I_i$  = momento de inércia;
- $D_i$  = diâmetro ou lado da seção transversal; e
- $B$  = largura da seção transversal.

Assim, de acordo com o modelo proposto por Coello (2005), a função objetivo empregada para a otimização de colunas com seção quadrada e circular pode ser dada pela expressão mostrada na equação 11:

$$V_s = K (D_1^2 + 2D_2^2 + 2D_3^2 + D_4^2 + D_1D_2 + D_2D_3 + D_3D_4) \quad (11)$$

em que:

- $V_s$  = volume da coluna circular ou quadrada;
- $K$  = coeficiente adimensional; e
- $D_1, D_2, D_3, D_4$  = diâmetros ou lados da seção transversal.

Tabela 4 - Valores do coeficiente K

Seção Circular	Seção Quadrada	Seção Triangular
$\frac{\pi l}{36}$	$\frac{l}{9}$	$\frac{l\sqrt{3}}{36}$

Fonte: COELLO (2005)

Na equação 11 o valor da constante K corresponde a uma abreviação para o cálculo do volume de cada peça específica. O termo entre parênteses na equação 11 tem unidade de área (mm<sup>2</sup>, cm<sup>2</sup>, m<sup>2</sup>, etc.) e assim K deve assumir a dimensão linear do elemento para haver a possibilidade do cálculo do volume final.

### 2.3.2.2 Comprovação dos valores da constante K

Para comprovar os valores constantes na tabela 4 propostos por Coello (2005) é necessário fazer uso da formulação referente ao cálculo de volumes de troncos de pirâmide. A área das bases maior e menor serão função dos tipos de seção estudadas em cada caso.

De acordo com Paiva (2005) a fórmula que leva à obtenção do volume de um tronco de pirâmide é dada pela equação 12.

$$V_{t,pir} = \frac{h}{3} (A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b) \quad (12)$$

em que:

- $V_{t,pir}$  = volume do tronco de pirâmide;
- $h$  = altura do tronco de pirâmide;
- $A_B$  = área da base maior do tronco de pirâmide; e

$A_b$  = área da base menor do tronco de pirâmide.

Para determinar o valor da constante K para cada uma das seções de estudo tomou-se a primeira faixa de diâmetros mostrada na figura 11, os diâmetros D1 e D2. Para os demais trechos é válida a mesma metodologia.

Nota-se que a estrutura analisada é simétrica, sendo portanto necessário multiplicar o valor obtido no cálculo final de cada seção por dois para obter-se o valor completo do volume da peça.

- Para elementos de seção circular

De acordo com Paiva (2005), a área da base de uma superfície circular é dada por:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad (13)$$

em que:

A = área da seção transversal do elemento; e  
D = diâmetro da seção transversal.

Substituindo os valores de área na equação 12 obtém-se o volume do trecho em análise.

$$V_{t,pir} = \frac{h}{3} (A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b) = \frac{L}{6 \times 3} \left( \frac{\pi D_1^2}{4} + \sqrt{\frac{\pi D_1^2}{4} \frac{\pi D_2^2}{4}} + \frac{\pi D_2^2}{4} \right)$$

$$V_{t,pir} = \frac{L}{18} \left( \frac{\pi D_1^2}{4} + \pi \left( \frac{D_1 D_2}{4} \right) + \frac{\pi D_2^2}{4} \right) = \frac{\pi L}{18} \left( \frac{D_1^2}{4} + \frac{D_1 D_2}{4} + \frac{D_2^2}{4} \right)$$

$$V_{t,pir} = \frac{\pi L}{72} (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2)$$

Para os dos trechos simétricos da peça tem-se:

$$V_{t,pir} = 2x \left( \frac{\pi L}{72} (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2) \right) = \frac{\pi L}{36} (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2)$$

Ou;

$$V_{t,pir} = K (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2)$$

- Para elementos de seção quadrada

De acordo com Paiva (2005), a área da base de uma superfície quadrada é dada por:

$$A = D^2 \quad (14)$$

em que:

- A = área da seção transversal do elemento; e  
D = dimensão do lado da seção transversal.

Substituindo os valores de área na equação 12 obtém-se o volume do trecho em análise.

$$V_{t,pir} = \frac{h}{3}(A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b) = \frac{L}{6x3} \left( D_1^2 + \sqrt{D_1^2 D_2^2} + D_2^2 \right)$$

$$V_{t,pir} = \frac{L}{18} (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2)$$

Para os dos trechos simétricos da peça tem-se:

$$V_{t,pir} = 2x \left( \frac{L}{18} (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2) \right) = \frac{L}{9} (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2)$$

Ou;

$$V_{t,pir} = K(D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2)$$

- Para elementos de seção triangular

De acordo com Paiva (2005), a área da base de uma superfície triangular é dada por:

$$A = \frac{Dh}{2} \quad (15)$$

em que:

- A = área da seção transversal do elemento;  
D = dimensão do lado da seção transversal; e  
H = altura da seção transversal.

Substituindo os valores de área na equação 12 obtém-se o volume do trecho em análise.

$$V_{t,pir} = \frac{h}{3}(A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b) = \frac{L}{6x3} \left( \frac{D_1 h}{2} + \sqrt{\left(\frac{D_1 h}{2}\right) \left(\frac{D_2 h}{2}\right)} + \frac{D_2 h}{2} \right)$$

Por estar trabalhando com um triângulo equilátero de lado Di, a altura h será dada por:

$$h = \frac{D \sqrt{3}}{2}$$

Assim, teremos:

$$V_{t,pir} = \frac{L}{18} \left( \frac{D_1 \left( \frac{D_1 \sqrt{3}}{2} \right)}{2} + \sqrt{\left( \left( \frac{D_1 \left( \frac{D_1 \sqrt{3}}{2} \right)}{2} \right) \right) \left( \frac{D_2 \left( \frac{D_2 \sqrt{3}}{2} \right)}{2} \right) + \frac{D_2 \left( \frac{D_2 \sqrt{3}}{2} \right)}{2}} \right)$$

$$V_{t,pir} = \frac{L}{18} \left( \frac{D_1^2 \sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{D_1^2 \sqrt{3} D_2^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{D_2^2 \sqrt{3}}{4}} \right)$$

$$V_{t,pir} = \frac{L}{18} \left( \frac{D_1^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{D_1 D_2 \sqrt{3}}{4} + \frac{D_2^2 \sqrt{3}}{4} \right) = \frac{L \sqrt{3}}{18 \cdot 4} (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2)$$

$$V_{t,pir} = \frac{L \sqrt{3}}{72} (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2)$$

Para os dos trechos simétricos da peça tem-se:

$$V_{t,pir} = 2x \left( \frac{L \sqrt{3}}{72} (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2) \right) = \frac{L \sqrt{3}}{36} (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2)$$

Ou;

$$V_{t,pir} = K (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2)$$

Do mesmo modo como para o cálculo da constante  $\alpha$ , a seção triangular foi tomada como sendo um triângulo equilátero de dimensão  $D_i$  como mostrado na figura 12.

O correto emprego da função aptidão nesta formulação está associado à adoção de alguns critérios referentes à manutenção da forma da peça em estudo. A equação 16 mostra que o diâmetro, (ou lado), da seção transversal do elemento deve ser tal que haja limitação das boras superior e inferior em qualquer seção escolhida. Estes limites serão obrigatoriamente fornecidos como parâmetro de entrada no algoritmo e empregados para a definição dos indivíduos da população.

$$C_l < D_i < C_u \quad i = 1,2,3,4 \quad (16)$$

em que:

- $C_l$  = limite inferior da borda da seção;
- $C_u$  = limite superior da borda da seção; e
- $D_i$  = diâmetros ou lados da seção transversal.

Cada indivíduo deve obrigatoriamente atender ao critério estabelecido na equação 16. Em caso de negação do critério é necessário adotar parâmetros de correção dos valores

que tornem os resultados aptos à formulação. Estes parâmetros, como mencionado por Arora (1989), são chamados de penalidades, ou módulos de penalidade, e devem ser escolhidos adequadamente em cada situação de estudo porque é um parâmetro estritamente dependente do problema que se está trabalhando.

Analogamente, como proposto por Coello (2005), para colunas com seção do tipo retangular, a função objetivo será dada pela expressão mostrada na equação 17.

$$V_s = \frac{b \ell}{9} (D_1 + 2D_2 + 2D_3 + D_4 + \sqrt{D_1 D_2} + \sqrt{D_2 D_3} + \sqrt{D_3 D_4}) \quad (17)$$

em que:

- $V_s$  = volume da coluna circular ou quadrada;
- $b$  = largura da coluna;
- $\ell$  = comprimento da coluna; e
- $D_1, D_2, D_3, D_4$  = diâmetros ou lados da seção transversal.

A função objetivo para o presente caso assume forma similar à equação 11, sendo bastante importante que as condições de rigidez empregadas (inércia e módulo de elasticidade) sejam criteriosamente bem informadas e empregadas na entrada de dados do algoritmo.

$$\frac{P^3 h^6}{E^3 I'_2 I'_3 I'_4} - 2 \frac{P^2 h^4}{E^2} \left( \frac{1}{I'_2 I'_3} + \frac{1}{I'_3 I'_4} + \frac{1}{I'_2 I'_4} \right) + \frac{P h^2}{E} \left( \frac{2}{I'_2} + \frac{4}{I'_3} + \frac{3}{I'_4} \right) - 2 = 0 \quad (18)$$

em que:

- $P$  = volume da coluna circular ou quadrada;
- $h$  = largura da coluna;
- $E$  = comprimento da coluna; e
- $I'_2, I'_3, I'_4$  = momento de inércia das seções transversais.

Na equação 18 os momentos de inércia  $I'_2, I'_3$  e  $I'_4$  são obtidos a partir da relação dada na equação 19:

$$I'_i = \frac{D_i b^3}{12} \quad , i = 1,2,3,4 \quad (19)$$

em que:

- $I'_i$  = momento de inércia de cada elemento;
- $D_i$  = lado da seção transversal do elemento;
- $b$  = largura da seção transversal do elemento; e
- $i$  = índice que indica os número de seções na coluna.

### 2.3.3 Modelo de Otimização

O critério básico para se trabalhar com métodos de otimização está relacionado à adoção de condições restritivas que caracterizam os problemas estudados. Desde restrições quanto à forma, com definição de dimensões mínimas e máximas permitidas, quanto à carga máxima aplicada, definições relacionadas ao custo máximo, entre outras considerações.

De acordo com o modelo proposto por Coello (2005), é necessário verificar restrições referentes à forma das peças, com definições claras das dimensões físicas de cada elemento.

Foi mostrado anteriormente que para os elementos de seção transversal circular, quadrada e triangular as condições restritivas correspondem ao mostrado na equação 16. Para elementos de seção retangular as condições restritivas de forma são indicadas pela equação 20.

$$\begin{cases} b \times D_i > A_i \\ C_i < D_i < C_u \\ C_i < b < C_u \end{cases} \quad i = 1,2,3,4 \quad (20)$$

em que:

b	=	largura da seção transversal do elemento;
$D_i$	=	lado da seção transversal do elemento;
$C_i$	=	limite inferior de borda da seção transversal;
$C_u$	=	limite superior de borda do elemento; e
i	=	índice da seção em estudo.

Em comparação com as restrições impostas aos demais elementos, os elementos de seção transversal retangular estão submetidos a uma condição adicional referente à dimensão da base do elemento estrutural, que neste caso manteve-se constante.

Além disso, como os elementos estão limitados a trabalharem em faixas permitidas para a definição de suas dimensões físicas, a área da seção transversal de cada elemento deverá obrigatoriamente respeitar a estas condições, já que seu valor depende diretamente dos valores calculados para os diâmetros, ou lados, dos elementos.

Alguns dos parâmetros iniciais de entrada do algoritmo genético são a carga e a tensão de resistência do material empregado para moldagem do elemento estrutural (concreto, aço, etc.). De acordo com a NBR 6118/2014 estes fatores tem uma relação direta com a determinação da área máxima permitida para não ocorrência de falha estrutural, sendo portanto necessário verificar, também, o critério quanto à limitação de área do elemento estrutural em cada uma das situações.

Na equação 21 é apresentada a relação entre a carga e a tensão, que fornece como resultado o valor máximo permitido para a área dos elementos estruturais.

$$A_i = \frac{P}{\sigma_y} \quad (21)$$

em que:

A	=	área da seção transversal do elemento;
P	=	carga axial aplicada ao elemento; e
$\sigma_y$	=	Tensão admissível.

Os elementos que não atenderem às condições restritivas impostas devem obrigatoriamente ser penalizados. A penalização deverá acontecer de forma automática em todos os processos de análise e sua ocorrência será determinante para a obtenção consistente dos resultados. O procedimento básico para aplicação das penalidades no processo de otimização adotado neste trabalho é mostrado no trecho de código descrito abaixo:

```

1   check1 = Erro (avaliado pelas equações (8 e 18))
2   Se  $P / (A_i \times \sigma_y) - 1.0 > 0.0$  então check2 = 1.0
3   senão check2 = 0.0
4   fitness = 1.0 / (volume x (check1 + check2) + 1.0)

```

No trecho de código mostrado as variáveis *check1* e *check2* representam a parcela responsável por somar os pesos das penalidades em cada iteração, caso as condições restritivas não sejam respeitadas, e leva-los ao peso total da população, *fitness*.

Esta abordagem, penalizações por critério de restrição, é necessária para manter o controle sobre os indivíduos escolhidos durante os processos iterativos, significando, de forma resumida, no valor que o peso que cada indivíduo deve possuir para que o peso total da população não sofra estagnação prematura.

A linha 4 do pseudocódigo representa o processo de minimização dos volumes finais pretendida inicialmente. O peso de cada indivíduo será calculado e somado ao peso total da população até ser atingido o número máximo de indivíduos para a população corrente. Ao final do último processo iterativo o peso total da população estará determinado, obtendo peso máximo.

Para ser retornado o peso mínimo para a população realiza-se a inversão da função peso, *fitness*. Isso garante que o peso final será o menor peso calculado ao final do processo de otimização.

Basicamente o processo de inversão dos pesos empregado no trabalho de otimização é descrito na equação 22.

$$\text{Peso minimizado} = \frac{1}{\text{Volume}} \quad (22)$$

em que:

$$\begin{aligned} \text{Peso minimizado} &= \text{área da seção transversal do elemento; e} \\ \text{Volume} &= \text{Volume final da geração} \end{aligned}$$

Em seu trabalho Coello (2005) traz uma série de modelos, mencionados anteriormente por Fu e Ren (1992), que foram testados e comparados através de diferentes métodos de representação. No total foram quatro exemplos numéricos, hipotéticos, relativos às quatro seções de estudo mostradas nesta formulação. Os exemplos e resultados encontrados por Coello (2005) e que posteriormente serão utilizados para verificação da validade de aplicação do algoritmo de otimização proposto neste trabalho é mostrado na seção referente aos materiais e métodos empregados para a elaboração do trabalho.

## **2.4 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO PARA UM MODELO EXPERIMENTAL**

Para a verificação da aplicação dos conceitos dos algoritmos genéticos e da proposta de Coello (2005) para a determinação do volume de peças sujeitas a carregamentos axiais de compressão, utilizou-se como referência a pesquisa realizada por Pedreschi (2015), intitulada *A preliminary study of the strength of non-prismatic columns using fabric formwork*, e determinou-se a viabilidade de uso do código genético.

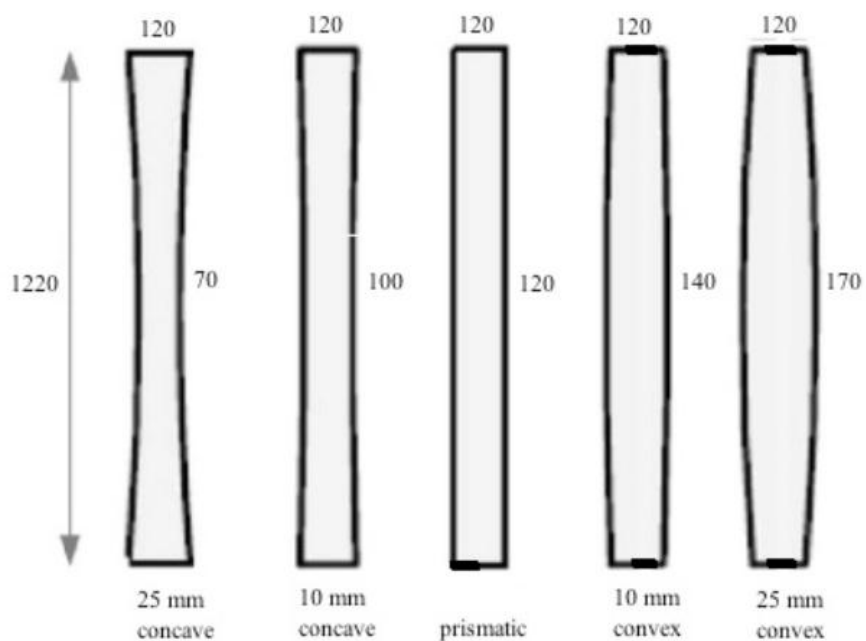
A pesquisa de Pedreschi (2015) está voltada à verificação das cargas e tensões últimas em um elemento sujeito a carregamento concentrado ao longo de seu eixo. Para o estudo Pedreschi (2015) empregou uma série de protótipos construídos com o uso de concreto simples, todos com as mesmas proporções de material e volume, assumindo formas específicas e solicitados por cargas controladas em laboratório.

As peças moldadas assumiram formas convexas, côncavas e prismáticas, com faixas de variação dos diâmetros das seções de topo, base e ponto médio bem definidas. Todas as peças foram moldadas com seção do tipo circular.

Para o estudo Pedreschi (2015) selecionou duas séries com um conjunto de cinco protótipos cada, sendo formadas por uma peça prismática regular de 1220 milímetros de altura e 120 milímetros de diâmetro, um par de protótipos do tipo côncavo, e um par de protótipo do tipo convexo.

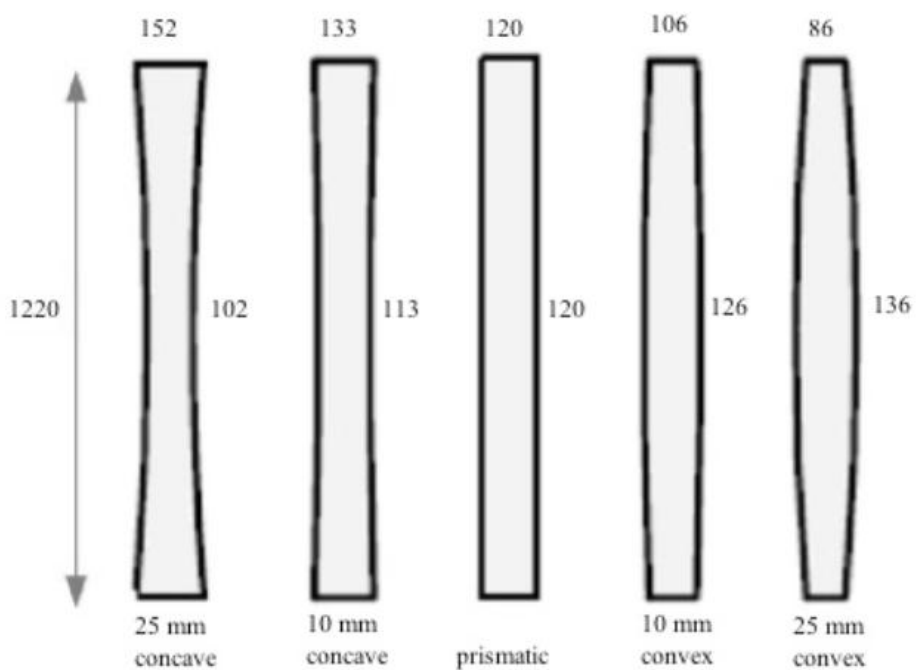
Os modelos dos protótipos empregados no estudo são mostrados nas figuras 16 e 17 com destaque para cada série de dados analisados.

Figura 16 – Dimensões dos protótipos das colunas utilizadas na série 1.



Fonte: PEDRESCHI (2015)

Figura 17 – Dimensões dos protótipos das colunas utilizadas na série 2.



Fonte: PEDRESCHI (2015)

De acordo com Pedreschi (2015) todas as peças foram moldadas empregando o mesmo volume de concreto, sendo todos os modelos de seção transversal circular.

O concreto empregado na confecção das peças, em ambas as séries de protótipos, foi dosado, em massa, na proporção 1: 1.73: 1.87 (cimento, areia e agregado, respectivamente) Na série 1, a quantidade de água foi mensurada de modo que a relação água-cimento ficasse na faixa de 0.46 a 0.51. Para a série 2 fez uso de um aditivo plastificante na mistura e por esta razão a relação água cimento ficou em torno de 0.4. A adoção do plastificante reduz a quantidade de água utilizada no concreto e em contrapartida ajuda no ganho de resistência do material. HELENE e ANDRADE (2010)

Pelo fato de todas as peças terem o mesmo volume tomou-se, pela facilidade de cálculo, o modelo reto para a determinação do volume das peças. O modelo em questão possui diâmetro igual a 12 centímetros e altura de 122 centímetros.

De acordo com Paiva (2005), o volume de um cilindro é dado como mostrado na equação 23.

$$V = \frac{\pi D^2}{4} h \quad (23)$$

em que:

D = diâmetro da seção transversal do elemento; e  
h = altura do elemento.

Sendo assim, o volume dos elementos corresponde ao valor mostrado abaixo.

$$V = \frac{\pi 12^2}{4} \times 122 = 13797,468 \text{ cm}^3$$

O volume calculado, que será considerado como o volume de concreto que foi utilizado para a moldagem de cada uma das peças das séries de protótipos, será o valor de referência utilizado para comprovação dos resultados obtidos com o uso do algoritmo genético.

Os resultados experimentais contendo os valores dos carregamentos últimos impostos sobre os protótipos obtidos por Pedreschi (2015) são mostrados nas tabelas 5 e 6.

Tabela 5 - Resultados para colunas de protótipos da série 1.

<b>Número do teste</b>	<b>Forma</b>	<b>Carga de ruptura (KN)</b>	<b>Resistência à compressão do concreto (Mpa)</b>	<b>Tensão de compressão até altura média (Mpa)</b>	<b>Tensão de compressão até o topo (Mpa)</b>
1.1	25 mm côncava	112.5	23.4	29.2	9.9
1.2	25 mm côncava	116.5	21.2	30.3	10.3
1.3	10 mm côncava	142.5	27.9	18.1	12.6
1.4	10 mm côncava	177.0	21.3	22.5	15.6
1.5	direto	139.5	22.2	12.3	12.3
1.6	direto	171.0	21.2	15.1	15.1
1.7	10 mm convexa	181.0	27.9	11.8	16.0
1.8	10 mm convexa	165.0	22.1	10.7	14.6
1.9	25 mm convexa	179.4	22.1	7.9	15.9
1.10	25 mm convexa	184.5	23.4	8.1	16.3

Fonte: Adaptado de Pedreschi (2015)

Tabela 6 - Resultados para colunas de protótipos da série 2.

<b>Número do teste</b>	<b>Forma</b>	<b>Carga de ruptura (KN)</b>	<b>Resistência à compressão do concreto (Mpa)</b>	<b>Tensão de compressão até altura média (Mpa)</b>	<b>Tensão de compressão até o topo (Mpa)</b>
2.1	25 mm côncava	-	38.4	-	-
2.2	25 mm côncava	214.5	42.6	25.4	12.3
2.3	10 mm côncava	213	34.3	19.6	15.7
2.4	10 mm côncava	219	40.6	20.1	15.5
2.5	direto	144	42	12.3	12.7
2.6	direto	216.5	43.5	18.3	16.9
2.7	10 mm convexa	135	42	10.6	14.2
2.8	10 mm convexa	188	43.5	14.7	19.5
2.9	25 mm convexa	77	38.4	5.2	11.2
2.10	25 mm convexa	102	42.6	6.9	14.8

Fonte: Adaptado de Pedreschi (2015)

Segundo Pedreschi (2015), dos resultados apresentados da série 2 de protótipos, o experimento 2.1, correspondente à coluna com 25 milímetros de concavidade, acabou sofrendo danificação durante seu transporte até o laboratório de teste de carga e por esta razão acabou sendo descartado.

Os resultados apresentados nas tabelas 5 e 6 serão tomados como referência para os dados de entrada do algoritmo genético, além das dimensões mostradas nas figuras 16 e 17. Espera-se que os resultados obtidos com o auxílio do algoritmo genético sejam menores do que o volume utilizado para a confecção das peças estudadas por Pedreschi (2015). Esse fato comprovaria de forma definitiva a viabilidade de aplicação do método criado neste trabalho devido ao fato de se estar trabalhando com resultados experimentais já realizados e aceitos pela comunidade acadêmica.

### 3. MATERIAL E MÉTODOS

#### 3.1 CASO COELLO (2005)

Para demonstrar a validade de emprego do modelo de cálculo sobre a otimização de estruturas sujeitas a carregamentos axiais de compressão ao longo do eixo, Coello (2005) ao citar Fu e Ren (1992), traz uma série de exemplos numéricos que mostram como o resultado obtido pelo processo de otimização pode ser empregado para obtenção dos resultados ótimos esperados. Nos itens 3.1.1 a 3.1.4 são mostrados os exemplos empregados para a realização dos cálculos de otimização empregados por Coello (2005), com a definição clara dos tipos de elementos analisados.

##### 3.1.1 Caso 1 (Elemento de seção circular)

Selecione o melhor diâmetro para uma coluna circular de aço de 10' (3,048 m) de comprimento sujeita a um carregamento axial de 400 kips (181,437 Ton). O módulo de elasticidade é  $E = 30 \times 10^6$  psi (2109,209 Ton/cm<sup>2</sup>) e tensão admissível  $\sigma_y$  de 60,000 psi (4,218 Ton/cm<sup>2</sup>). O diâmetro mínimo a ser calculado é de 2.914" (7,402 cm). As variáveis de projeto são os diâmetros nos pontos nodais  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$ . As bordas inferior e superior,  $C_i$  e  $C_\mu$ , são 2,914" (7,402 cm) e 20" (50,8 cm), respectivamente.

##### 3.1.2 Caso 2 (Elemento de seção quadrada)

Selecione as melhores larguras laterais para uma coluna quadrada de aço de 10' (3,048 m) de comprimento sujeita a um carregamento axial de 400 kips (181,437 Ton). O módulo de elasticidade é  $E = 30 \times 10^6$  psi (2109,209 Ton/cm<sup>2</sup>) e tensão admissível  $\sigma_y$  de 60,000 psi (4,218 Ton/cm<sup>2</sup>). O diâmetro mínimo a ser calculado é de 2.582" (6,558 cm). As variáveis de projeto são os diâmetros nos pontos nodais  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$ . As bordas inferior e superior,  $C_i$  e  $C_\mu$ , são 2,582" (6,558 cm) e 20" (50,8 cm), respectivamente.

##### 3.1.3 Caso 3 (Elemento de seção triangular)

Selecione o melhor diâmetro para uma coluna em forma de triângulo equilátero de aço de 10' (3,048 m) de comprimento sujeita a um carregamento axial de 400 kips (181,437 Ton). O módulo de elasticidade é  $E = 30 \times 10^6$  psi (2109,209 Ton/cm<sup>2</sup>) e tensão admissível  $\sigma_y$  de 60,000 psi (4,218 Ton/cm<sup>2</sup>). O diâmetro mínimo a ser calculado é de 3,924" (9,967 cm). As variáveis de projeto são os diâmetros nos pontos nodais  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$ . As bordas inferior e superior,  $C_i$  e  $C_\mu$ , são 3,924" (9,967 cm) e 20" (50,8 cm), respectivamente.

### 3.1.4 Caso 4 (Elemento de seção retangular)

Selecione o melhor diâmetro para uma coluna retangular de aço de 10' (3,048 m) de comprimento sujeita a um carregamento axial de 400 kips (181,437 Ton). O módulo de elasticidade é  $E = 30 \times 10^6$  psi (2109,209 Ton/cm<sup>2</sup>) e tensão admissível  $\sigma_y$  de 60,000 psi (4,218 Ton/cm<sup>2</sup>). O diâmetro mínimo a ser calculado é de 1,500" (3,810 cm). As variáveis de projeto são os diâmetros nos pontos nodais D<sub>1</sub>, D<sub>2</sub>, D<sub>3</sub> e D<sub>4</sub>. As bordas inferior e superior, C<sub>i</sub> e C<sub>μ</sub>, são 1,500" (3,810 cm) e 20" (50,8 cm), respectivamente.

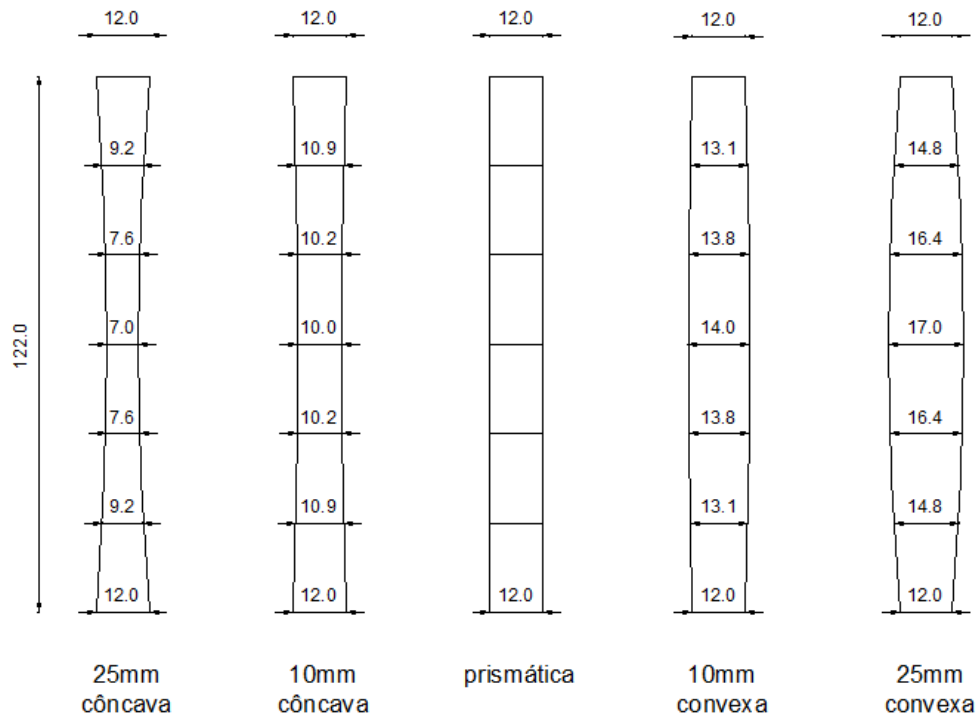
Na seção quatro deste texto são mostrados os resultados obtidos por Coello (2005) ao desenvolver cada um dos problemas descritos utilizando algoritmos genéticos. Os resultados, ou volumes finais, servirão como base de referência para a verificação da viabilidade de aplicação do algoritmo genético proposto neste trabalho, e é esperado que os resultados obtidos pelo AG se enquadrem na faixa de valores mostrados para que seja possível adotar o modelo em outras aplicações.

### 3.2 CASO PEDRESCHI (2015)

Uma das exigências do método de cálculo do algoritmo genético proposto é informar os valores das dimensões iniciais e finais das seções transversais do elemento, como especificado na figura 11 e nas equações 16 e 20. Dessa forma, fez-se necessário obter as dimensões do elemento nos pontos nodais exatos, como especificado na figura 6.

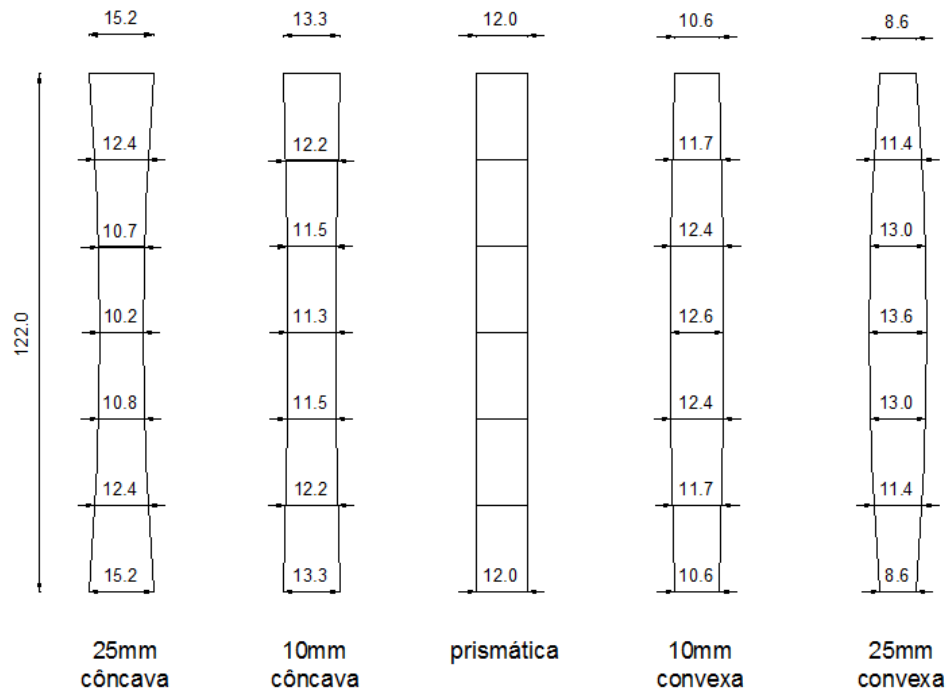
Com o uso do software AutoCAD2010 foi possível obter as dimensões exatas dos trechos dos protótipos dados nas figuras 16 e 17 nos pontos nodais referentes aos pontos necessários para aplicação do método proposto por Coello (2005). As dimensões obtidas são apresentadas nas figuras 18 e 19, com as unidades em centímetros.

Figura 18 – Características geométricas dos protótipos para a série 1.



Fonte: Adaptado de Pedreschi (2015)

Figura 19 – Características geométricas dos protótipos para a série 2.



Fonte: Adaptado de Pedreschi (2015)

As dimensões obtidas por trecho do elemento serão empregadas para definição dos limites inferior e superior exigidos como parâmetro de entrada do algoritmo genético. Além

disso, empregar tais informações irá garantir que a forma da peça seja mantida, embora este não seja um requisito obrigatório neste trabalho. Nos itens 4.3.1 e 4.3.2 são apresentados os resultados obtidos com o uso do algoritmo genético para a determinação dos volumes das colunas apresentadas nas figuras 18 e 19.

Além disso, as cargas constantes nas tabelas 5 e 6 e que serão empregadas como parâmetro de entrada do algoritmo genético foram divididas por 1.4 com o objetivo de se trabalhar no modo elástico. Trabalhar com a carga de ruptura, nesta situação, faz com que o algoritmo retorne fatores de segurança elevados, visto que a estrutura passará para o modo plástico ao entrar em colapso.

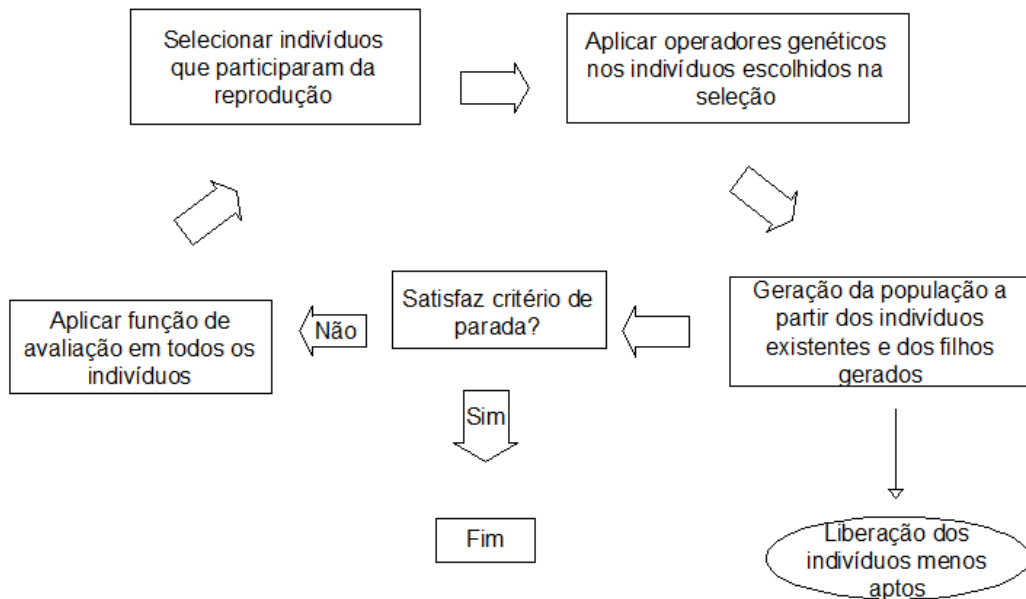
### **3.3 DESENVOLVIMENTO DO ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO**

O algoritmo de otimização empregado neste trabalho foi construído a partir de um código genérico básico disponibilizado por Coley (1998) em um de seus trabalhos, intitulado *An Introduction to Genetic Algorithms for Scientists and Engineers*. O algoritmo traz as funções, ou sub-rotinas, básicas necessárias para a aplicação da teoria da evolução genética e possibilita o seu emprego para a resolução da maioria dos problemas básicos comentados neste texto.

A construção do código genético foi realizada com o uso da linguagem de programação Fortran e como compilador utilizou-se o Fortran PowerStation 4.0. Empregou-se como máquina de trabalho um notebook com processador Pentium IV T4200 de 2.00GHz e 3.00 GB de memória.

Basicamente o procedimento seguido pelo algoritmo genético para determinação dos volumes ótimos está descrito no fluxograma mostrado na figura 20.

Figura 20 - Fluxograma do procedimento de análise do algoritmo genético.



Fonte: LINDEN (2012).

O processo seguido pelo algoritmo começa com a criação de uma população inicial de tamanho fixo e que deva abranger uma quantidade significativa para que os operadores genéticos possam agir e proporcionar uma convergência rápida dos resultados.

Com a população criada o algoritmo fará com que os indivíduos sejam submetidos à análise, passando pela função de avaliação do problema. Cada indivíduo da população será avaliado por meio de requisitos da engenharia e caso seu valor, ou peso, seja positivo, estará apto para prosseguir no andamento do processo.

Estando definidos os indivíduos bons para prosseguir com o processo de otimização, o algoritmo selecionará aqueles que estão mais bem adaptados para compor uma população de peso ideal, ou quase ideal.

Selecionados os indivíduos componentes da população o algoritmo fará atuar sobre cada um dos elementos os fatores, ou operadores, genéticos de cruzamento e mutação. No procedimento os indivíduos serão submetidos a processos de combinação e mudança em seu código genético e servirão de ponte para a criação de novos indivíduos. Esses novos indivíduos terão uma combinação genética, de acordo com a teoria da evolução de Darwin, mais favorável à manutenção da sobrevivência da população, proporcionando uma geração de indivíduos mais bem adaptados ao problema. Isso possibilitará uma convergência rápida dos resultados e melhorará a performance do algoritmo genético.

Após realizados os processos o algoritmo fará uma nova análise para a população da geração corrente e avaliará o resultado. Caso o critério de parada seja positivo o resultado é retornado e informado ao usuário. Caso o critério seja negativo o processo de iteração

prosseguirá e terminará quando o número de gerações informado for atingido, ou o resultado esperado seja encontrado.

A seguir é mostrado um pseudocódigo do processo de otimização descrito na figura 20.

```
.  
1      INICIO  
2      Ler dados de entrada  
3      Geração = 1  
4      Faça  
5      {  
6          Iniciar população  
7          Para  $i=1$  até  $i \leq PSize$ ;  $i=i+1$   
8          Aplicar função de avaliação  
9              Se (indivíduo atender critério de avaliação) Então  
10             Incluir na população  
11             Senão  
12                 Descartar indivíduo  
13             Fim se  
14         Fim para  
15     Iniciar processo de seleção  
16     Para  $i=1$  até  $i \leq PSize$ ;  $i=i+1$   
17     Aplicar operadores genéticos  
18         Se (cruzamento < probabilidade de cruzamento) Então  
19             Aplicar operador de combinação genética (Crossover)  
20         Fim se  
21         Se (mutação < probabilidade de mutação) Então  
22             Aplicar operador de mutação  
22         Fim se  
23     Fim para  
24     Calcular Peso da população  
25     Critério de parada  
26     Se critério de parada = "SIM" Então  
27         Imprima geração  
28     Retorne Peso
```

```

29           Fim se
30   Geração ++
31   }
32   Enquanto (Geração ≤ Máximo de gerações)
33   FIM

```

No algoritmo mostrado a função de avaliação governará todos os critérios necessários à boa performance do processo de otimização. Neste trabalho iremos fazer a verificação quanto aos parâmetros relacionados à manutenção da existência de um fator de segurança para cada um dos indivíduos gerados, de modo a assegurar a validação de emprego do método, além de manter valores para a área de cada elemento com um valor aceitável do ponto de vista da engenharia. Os elementos que não atenderem aos critérios de segurança e de área sofrerão penalidades individualmente, ficando sujeitos à serem admitidos, ou não, como peça para a formação do peso da população.

No algoritmo fornecido por Coley (1998) a função peso, ou função de avaliação, trabalha com o objetivo de maximizar o peso da população para admitir a criação de gerações de indivíduos mais aptos do ponto de vista da evolução genética. Em nosso caso, como queremos obter resultados mais econômicos do ponto de vista da engenharia, teremos que inverter o valor da função para trabalhar com valores mínimos de volume de material. A função empregada assume a forma indicada na equação 24 mostrada abaixo.

$$V(D_i) = V(D_i) + Pen \quad (24)$$

em que:

$V(D_i)$  = peso calculado para a população; e  
 $Pen$  = fator de penalidade do problema.

Na equação 23 o volume  $V(D_i)$  poderá assumir a forma indicada nas equações 11 e 17. Ou seja:

- Para os casos de seções transversais circulares ou quadradas:

$$V(D_i) = K (D_1^2 + 2D_2^2 + 2D_3^2 + D_4^2 + D_1D_2 + D_2D_3 + D_3D_4)$$

- Para os casos de seção transversal retangular:

$$V(D_i) = \frac{b \ell}{9} (D_1 + 2D_2 + 2D_3 + D_4 + \sqrt{D_1D_2} + \sqrt{D_2D_3} + \sqrt{D_3D_4})$$

O fator de penalidade a ser empregado nos problemas de otimização são fatores dependentes do caso em estudo. Algumas situações podem admitir fatores de penalidade elevados enquanto outros casos podem exigir penalidades menores, de modo a fazer com que os resultados oscilem em intervalos proporcionais ao problema em questão. ARORA (1989)

Adeli e Sarma (2006) comentam que as funções de avaliação empregadas nos problemas de otimização envolvendo algoritmos genéticos estão voltadas para procurar por pontos de máximo em um espaço de busca definido, sendo necessário fazer uma inversão da função para obter os resultados econômicos esperados. Desse modo a função a ser minimizada será dada pela equação 25 mostrada abaixo.

$$F_{\text{aptidão}} = \frac{1}{V(D_i)} \quad (25)$$

em que:

$F_{\text{aptidão}}$  = função a ser minimizada do problema; e  
 $V(D_i)$  = peso, ou volume, calculado para a população.

Na equação 24, o volume  $V(D_i)$  calculado é dado pelas equações 11 e 17, em cada caso, sugeridas por Coello (2005) para elementos sujeitos a carregamentos axiais de compressão ao longo de seu eixo.

### 3.4 PARÂMETROS DE ENTRADA DO ALGORITMO GENÉTICO

O algoritmo genético foi executado a partir da entrada de alguns parâmetros específicos. Estes parâmetros irão compor a identificação do processo de iteração que proporcionará a obtenção dos resultados esperados para o problema, mantendo a melhoria da performance das populações à medida que as gerações passarem ao longo do tempo. A Tabela 7 apresenta os parâmetros empregados para a execução do programa de otimização.

**Tabela 7** - Parâmetros de análise do algoritmo genético.

<b>Parâmetro</b>	<b>Descrição</b>
PSize	Tamanho da população
Nunkno	Número de pais (Quantidade de variáveis da função volume)
Sublen	Número de genes
MaxG	Quantidade de gerações
CP	Probabilidade para ocorrência de cruzamento genético
Scalec	Número de cópias de indivíduo de alto peso
Elt	Número de indivíduos de alto peso
Indiv	Indivíduo do problema (1,2,3 e 4)

<b>Parâmetro</b>	<b>Descrição</b>
LInf.	Limite adotado para a borda inferior da variável Di
LSup.	Limite adotado para a borda superior da variável Di
Seção	Tipo de seção a ser analisada (circular, quadrada, retangular...)
B	Dimensão da base da seção transversal (se houver)
L	Comprimento do elemento estrutural
TensãoL	Tensão admissível adotada
PA	Carregamento aplicado ao elemento estrutural
E	Módulo de elasticidade do material empregado no estudo
Pen	Fator de penalidade
Toler	Tolerância adotada para o crescimento da função CHK1

Fonte: O autor.

Para a execução do programa de otimização é necessário seguir os seguintes procedimentos, baseados nos parâmetros de entrada especificados na Tabela 7.

1. Inicialmente define-se o tamanho da população para o problema, atribuindo um valor inteiro à variável PSize;
2. Definir o número de indivíduos do problema, ou diâmetros Di, atribuindo um valor inteiro à variável Nunkno;
3. Estabelecer o número de genes de cada indivíduo, atribuindo um valor inteiro à variável Sublen;
4. Definir o tamanho máximo da geração, atribuindo um valor inteiro à variável MaxG;
5. Estabelecer a porcentagem para ocorrência de cruzamento genético, ou Crossover, atribuindo um valor real à variável CP. Basicamente as porcentagens padrão para cruzamento fica em torno de 60 e 80 por cento, de acordo com Linden (2012);
6. Definir o número de cópias, ou indivíduos de alto peso, que devem ser levados automaticamente à população da geração posterior sem necessidade de passar pelo processo de seleção, Elitismo. O número de cópias deve ser atribuído à variável Elt e deve ser um número inteiro;
7. Estipular o número de indivíduos, por ordem crescente, relacionados para o problema;
8. Definir o limite para a borda inferior de cada indivíduo. Esse limite vai estabelecer a dimensão mínima permitida para a escolha do diâmetro, ou lado, da seção transversal do elemento estrutural do problema;
9. Definir o limite para a borda superior de cada indivíduo. Análogo ao passo 8;

10. Definir o tipo de seção transversal do elemento estrutural: 1 – Circular, 2 – Quadrada, 3 – Triangular ou 4 – Retangular;
11. Determinar o tamanho da base do elemento estrutural. Se o elemento for circular, quadrada ou triangular definir base igual a zero, case contrário informar o valor;
12. Informar o comprimento do elemento estrutural, em centímetros;
13. Informar o valor para a tensão admissível do material empregado: concreto, aço, etc.;
14. Informar o valor para a carga aplicada, em quilo-newtons (KN);
15. Informar o valor para o módulo de elasticidade do material: concreto, aço, etc.;
16. Definir criteriosamente o valor para a penalidade que será aplicada sobre cada elemento que não atender aos critérios estipulados no modelo de cálculo. A penalidade deve ser um valor dependente do problema, podendo assumir valores elevados, ou vice-versa. Neste trabalho assumimos penalidades pequenas para a obtenção dos resultados; e
17. Definir a tolerância permitida para o cálculo das equações 8 e 18. Como o valor foi obtido a partir do cálculo de um determinante, o valor retornado deve ser igual ou muito próximo de zero. Assim, a tolerância adotada deve assumir valores relativamente pequenos para respeitar a definição das equações mencionadas.

A figura 21 apresenta o arquivo de entrada dos parâmetros de trabalho do programa de otimização, com a definição clara dos campos que devem ser preenchidos.

Figura 21 – Parâmetros de entrada do programa de otimização.

PSIZE	NUNKNO	SUBLEN	MAXG	CP	SCALEC	ELT
40	4	12	700	0.8	2	1
INDIV	LINF.	LSUP.				
1	6.9	12.0				
2	6.9	12.0				
3	6.9	12.0				
4	6.9	12.0				
SEÇÃO	B	L				
1	0	122.0				
TENSAOL	PA	E		PEN	TOLER	
4.35	154.643	1800.000		.01	1	

Fonte: O autor.

A função CHK1 mencionada na Tabela 7 como um critério para a aplicação da tolerância admitida no problema corresponde ao valor calculado para a função dada pelas equações 8 e 18, e é obrigatório para a validação do método que o resultado obtido pelo algoritmo genético no ponto de convergência dos resultados forneça um valor para a função CHK1 nulo, ou muito próximo de zero, para corresponder às definições das equações mencionadas.

A adoção dessa tolerância implica na obrigação do algoritmo em admitir apenas indivíduos com fatores de rigidez dentro do espaço de busca permitido, já que a função envolve todos os parâmetros relacionados às características físicas do elemento estudado (carga, módulo de elasticidade e inércia). Caso o critério não seja atendido fatores de penalidade serão aplicados sobre o indivíduo em questão.

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 4.1 MAXIMIZAÇÃO DA FUNÇÃO APTIDÃO

Como comentado no item 2.2.6, o algoritmo genético trabalha com o objetivo de maximizar o valor da função de aptidão, ou função peso. Desse modo, empregando a função  $f(x) = \sin(x)$  como sendo a função integrante do programa de otimização, espera-se que seja retornado como resultado o valor correspondente ao ponto máximo da função.

Para o intervalo fechado  $[-\pi; \pi]$  foi mostrado que a função possui um ponto máximo absoluto positivo para  $x = \pi/2$  igual a 1. É necessário, portanto, que para haver a comprovação do critério de busca o algoritmo retorne um valor correspondente igual, ou muito próximo, do valor procurado.

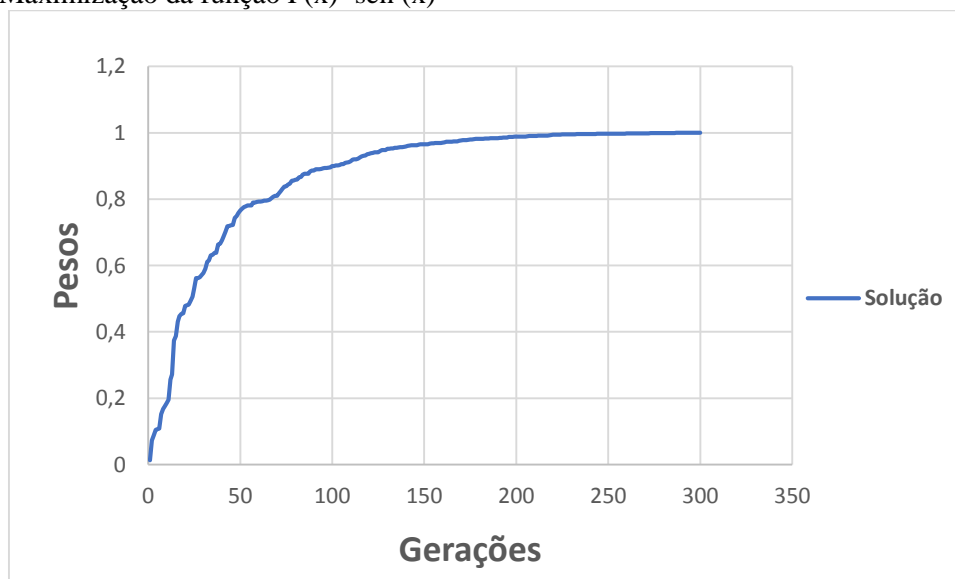
A tabela 8 apresenta os parâmetros de entrada empregados para a execução do algoritmo genético e o resultado final obtido na última geração informada. A figura 22 traz o resultado gráfico do processo de busca realizado pelo algoritmo, com ênfase ao ponto de convergência final obtido.

Tabela 8 – Resultados de busca do algoritmo genético para a função  $F(x) = \sin(x)$ .

População	Geração	Probabilidade de Crossover	Peso	Meta para o peso
40	300	0,8	0,99954	1

Fonte: O autor.

Figura 22 – Maximização da função  $F(x) = \sin(x)$



Fonte: O autor.

Como pode-se observar o algoritmo genético conseguiu obter como resultado final de busca um valor muito próximo ao esperado, tornando possível afirmar que o critério de busca realizado realmente tende a maximizar a função de aptidão, sendo, portanto, necessário realizar a inversão da função para poder trabalhar com valores mínimos em problemas de otimização.

## 4.2 CASOS COELLO (2005)

As soluções obtidas por Coello (2005) para determinação dos volumes ótimos em cada problema descrito nos itens 3.1.1 a 3.1.4 são mostrados na tabela 9, com uma referência ao que foi anteriormente exposto por Fu e Ren (1992) em seu trabalho de otimização com os mesmos casos estudados.

Tabela 9 - Volumes obtidos para os casos de carregamentos

Método	Volume 1 (cm <sup>3</sup> )	Volume 2 (cm <sup>3</sup> )	Volume 3 (cm <sup>3</sup> )	Volume 4 (cm <sup>3</sup> )
	Seção circular	Seção quadrada	Seção triangular	Seção retangular
Fu e Ren	26914.173	26355.373	24695.360	26513.541
GA (FP)	26918.434	26363.403	24740.080	19891.596
GA (B)	26919.302	26367.286	24742.292	26657.469
GA (G)	27005.777	26897.081	24853.708	28227.829

Fonte: COELLO (2005)

Na primeira coluna da tabela 9 as siglas FP, B e G significam, respectivamente, representação por ponto flutuante, representação binária e representação binária utilizando código Gray. Tais representações correspondem aos métodos empregados por Coello (2005) para a construção do algoritmo genético e posterior obtenção de seus resultados.

Na representação por ponto flutuante as séries de dados, podem assumir valores variando de zero a nove. Na representação binária a abordagem prática é realizada ao se trabalhar apenas com os dígitos 0 e 1, a informação básica do computador. A representação binária utilizando o código Gray é uma abordagem que se caracteriza por fazer a mudança em cada bit da cadeia de dados um a um, de forma a minimizar o erro existente nas avaliações, conhecido também por código binário refletido. O código foi originalmente criado por Frank Gray, em 1947, e até hoje é empregado em áreas como a indústria e a robótica, (DORAN, 2007).

Para que o algoritmo criado seja de fato eficiente e possível de ser empregado nos cálculos de otimização para as estruturas enquadradas dentro das limitações do programa, é

necessário que o resultado obtido para os volumes, em cada tipo de seção transversal esteja dentro da faixa de volumes mostrados na tabela 9.

#### 4.2.1 Caso 1: (Seção circular)

A tabela 10 apresenta os resultados obtidos durante o processo de otimização para a obtenção do volume ótimo de estruturas com seção do tipo circular. Da série de testes realizados observou-se que os resultados passaram a convergir de maneira mais acentuada quando adotou-se como parâmetros de entrada um número de gerações igual a 10 000 e uma população de 20 indivíduos. Populações com módulos acima, ou abaixo, deste limite tendiam a gerar volumes mais robustos, o que acabara por restringir os critérios de validação do programa e por conseguinte, invalidar os resultados.

O fato se justifica, como comentado por LINDEN (2012), pela razão que populações de indivíduos grandes, acima de 100 indivíduos, tendem a produzir superindivíduos devido aos processos de combinação, recombinação e mutação altamente agressivos que caracterizam os algoritmos genéticos. Enquanto que para populações pequenas, geralmente abaixo de 20 indivíduos, o algoritmo não possuirá elementos suficientes em sua estrutura de dados para poder procurar por soluções favoráveis, ficando limitado a um espaço de busca bastante reduzido e escasso. Desse modo poderá acabar ocorrendo duplicidade de indivíduos, pais e filhos com características similares, e uma possível convergência prematura dos resultados finais.

Para os demais casos a justificativa em se adotar os módulos de população e geração comentados anteriormente é idêntica.

Tabela 10 - Resultados finais obtidos pelo algoritmo genético para estruturas de seção circular.

População	Geração	CP	Penalidade	Tolerância	Volume (cm <sup>3</sup> )	CHK1	CHK2
20	700	0,8	1,000	0,900	26989,738	8,84E-02	0,000
20	700	0,6	1,000	0,800	27129,773	5,05E-02	0,000
20	700	0,6	1,000	0,700	27053,828	5,08E-04	0,000
20	700	0,6	1,000	0,600	27241,226	4,55E-02	0,000
20	700	0,6	1,000	0,900	27378,264	4,24E-02	0,000
20	700	0,8	1,000	0,010	27591,500	6,54E-01	1,000
20	700	0,8	1,000	0,001	27246,175	8,22E-01	1,000
20	700	0,8	0,700	0,001	27991,706	5,36E-02	0,700
20	700	0,8	0,700	0,010	33037,811	1,35E+00	0,700
20	700	0,8	0,700	0,000	46151,825	1,77E-01	0,700
20	700	0,6	0,700	0,010	27253,321	6,99E-01	0,700
120	700	0,8	1,000	0,900	27029,969	1,57E-01	0,000
<b>20</b>	<b>10000</b>	<b>0,8</b>	<b>1,000</b>	<b>0,900</b>	<b>26923,718</b>	<b>7,51E-02</b>	<b>0,000</b>

Fonte: O autor.

Na tabela 11 são mostrados os diâmetros finais para a estrutura procurada no ponto de convergência de busca do algoritmo genético. Com tais dimensões os critérios restritivos estabelecidos para a validação do problema estão atendidos.

Tabela 11 - Resultados finais dos diâmetros obtidos com o auxílio do algoritmo genético para elementos com seção circular.

<b>Diâmetros</b>	<b>Valor (cm)</b>	<b>Fator de Segurança</b>
1	7.4020	0.3242
2	9.9879	0.5857
3	11.7789	0.3947
4	12.0968	0.3756

Fonte: O autor.

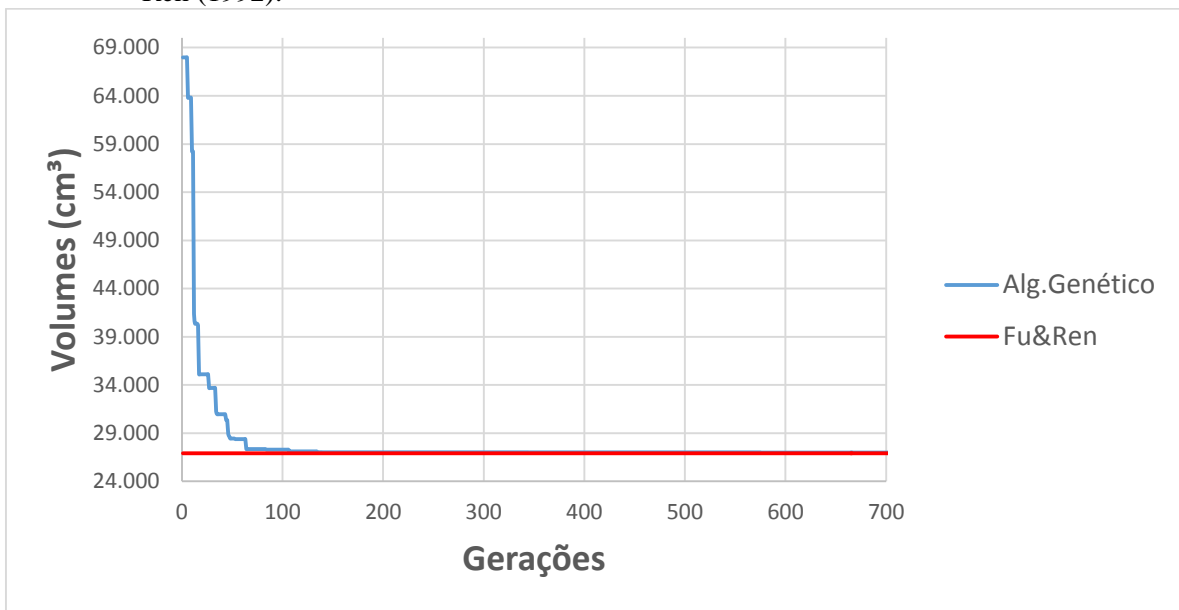
O fator de segurança mostrado na Tabela 11 é um valor que está ligado diretamente à definição do diâmetro adotado para cada indivíduo. Diâmetros menores implicarão em fatores de segurança maiores, e vice-versa.

Neste trabalho, como os diâmetros são calculados individualmente, não precisamente os fatores de segurança deverão seguir uma ordem de grandeza com relação aos indivíduos, porque a manutenção da forma da peça não é um requisito fundamental deste trabalho. Poderá ocorrer, por exemplo, do diâmetro correspondente ao indivíduo 1 ser maior que o diâmetro do indivíduo 4 mas seu fator de segurança acabar sendo maior, o que teoricamente estaria errado caso o crescimento das dimensões da peça fosse progressivo.

Desse modo fica claro que o cálculo do fator de segurança é individual, ou seja, cada indivíduo assumirá valores independentes à medida que forem sendo feitas alterações nos módulos dos parâmetros de entrada, sendo, portanto, fundamental que seja analisado corretamente os parâmetros de entrada para cálculo e definição das dimensões do programa de otimização. Esta definição é análoga para os demais casos estudados.

Nas figuras 23, 24, 25 e 26 são apresentados os gráficos comparativos entre os volumes encontrados com o uso do algoritmo genético e cada uma das bases de referência disponibilizadas por Coello (2005). Como pode-se notar os resultados obtidos encontram-se na faixa de resultados esperados, o que torna válido o uso do programa de otimização desenvolvido para o caso de elementos estruturais de seção circular.

Figura 23 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Fu e Ren (1992).



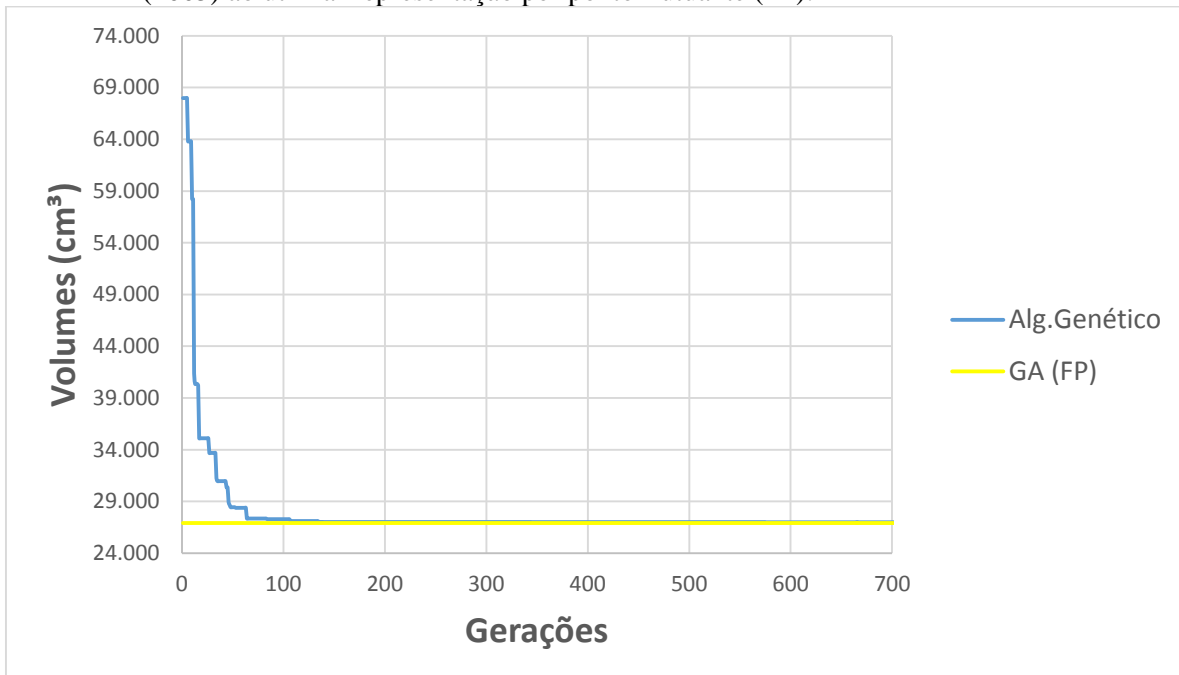
Fonte: O autor.

Tabela 12 – Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

<b>Método</b>	<b>Volume (cm<sup>3</sup>)</b>
Fu e Ren (1992)	26914,173
Algoritmo Genético	26923,718

Fonte: O autor.

Figura 24 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação por ponto flutuante (FP).



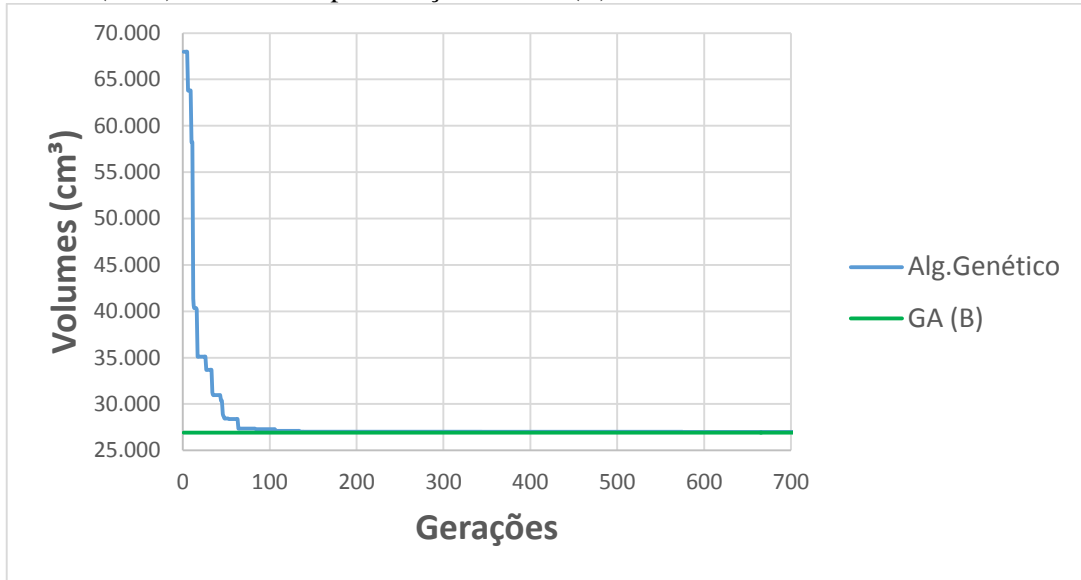
Fonte: O autor.

Tabela 13 – Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

<b>Método</b>	<b>Volume (cm<sup>3</sup>)</b>
FP	26918,434
Algoritmo Genético	26923,718

Fonte: O autor.

Figura 25 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação Binária (B).



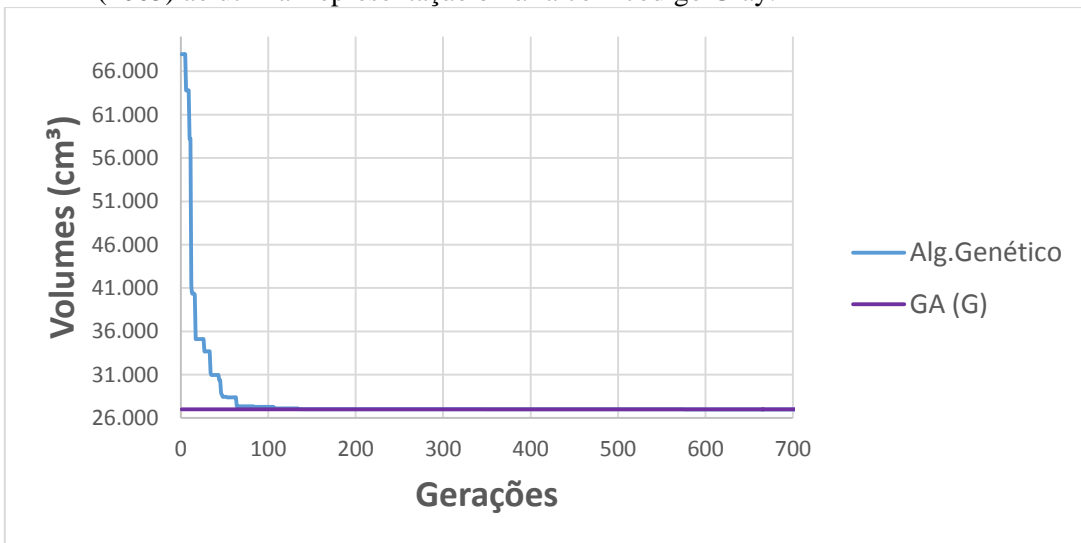
Fonte: O autor.

Tabela 14 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

<b>Método</b>	<b>Volume (cm<sup>3</sup>)</b>
B	26919,302
Algoritmo Genético	26923,718

Fonte: O autor.

Figura 26 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação binária com código Gray.



Fonte: O autor.

Tabela 15 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

<b>Método</b>	<b>Volume (cm<sup>3</sup>)</b>
Código Gray	27005,777
Algoritmo Genético	26923,718

Fonte: O autor.

Figura 27 - Comparação final entre os volumes obtidos em cada uma das abordagens de otimização.



Fonte: O autor.

Tabela 16 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

<b>Método</b>	<b>Volume (cm<sup>3</sup>)</b>
Fu e Ren (1992)	26914,173
FP	26918,434
B	26919,302
Código Gray	27005,777
Algoritmo Genético	26923,718

Fonte: O autor.

Tabela 17 - Precisão dos resultados em comparação com cada um dos processos de otimização.

	<b>Fu e Ren</b>	<b>FP</b>	<b>B</b>	<b>Código Gray</b>
<b>Algoritmo Genético</b>	99,96%	99,98%	99,98%	100,30%

Fonte: O autor.

A figura 27 e as tabelas 16 e 17 mostram com maior clareza o resultado final obtido pelo algoritmo genético em comparação aos demais métodos tomados como referência para o caso de estruturas de seção circular. Como pode-se observar o volume encontrado pelo AG é menor ao encontrado por Coello (2005) ao empregar representação binária utilizando código Gray, no entanto, ainda é maior se comparado aos três outros métodos. Todavia, a precisão do resultado final é tão alta, acima de 99%, que uma abordagem prática fazendo uso das dimensões físicas dos elementos encontradas para a estrutura tornaria a execução das peças bastante semelhante, o que valida o uso do algoritmo criado.

#### 4.2.2 Caso 2: (Seção quadrada)

Na tabela 18 são apresentados os resultados obtidos durante a análise do processo de otimização para as estruturas de seção transversal quadrada. Para este caso observou-se que os valores finais dos volumes convergiam de forma mais acentuada em relação à referência quando passou-se a adotar uma população igual a 20 indivíduos e geração de 10 000.

Tabela 18 - Resultados finais obtidos pelo algoritmo genético para estruturas com seção do tipo quadrada.

População	Geração	CP	Penalidade	Tolerância	Volume (cm <sup>3</sup> )	CHK1	CHK2
20	700	0,6	1,000	0,001	28386,988	7,92E-01	1,000
20	700	0,6	1,000	0,010	27807,578	7,07E-04	0,000
20	700	0,8	1,000	0,010	31966,466	3,93E-01	1,000
20	700	0,6	0,700	0,001	31248,024	1,41E-01	0,700
20	700	0,6	1,000	0,900	27818,869	1,02E-02	0,000
40	1500	0,6	1,000	0,010	26577,066	5,49E-02	1,000
20	2000	0,6	1,000	0,010	27790,829	1,66E-02	1,000
20	700	0,6	0,580	0,900	26399,641	4,03E-01	0,000
40	1000	0,6	1,000	0,001	27187,297	7,03E-01	1,000
20	700	0,6	0,700	0,010	27385,166	1,13E+00	0,700
20	700	0,6	0,580	0,010	26402,412	6,03E-01	0,580
40	700	0,6	0,580	0,900	28673,709	2,10E-01	0,000
<b>20</b>	<b>10000</b>	<b>0,6</b>	<b>0,580</b>	<b>0,900</b>	<b>26374,889</b>	<b>2,79E-01</b>	<b>0,000</b>

Fonte: O autor.

A tabela 19 traz os resultados finais para a configuração das dimensões do elemento estrutural analisado. Os diâmetros, ou lados, mostrados na referida tabela atendem aos critérios de segurança impostos para o problema e representam a forma mais econômica que se pode adquirir no caso em estudo.

Tabela 19 - Resultados finais dos diâmetros, ou lados, obtidos com o auxílio do algoritmo genético para elementos com seção quadrada.

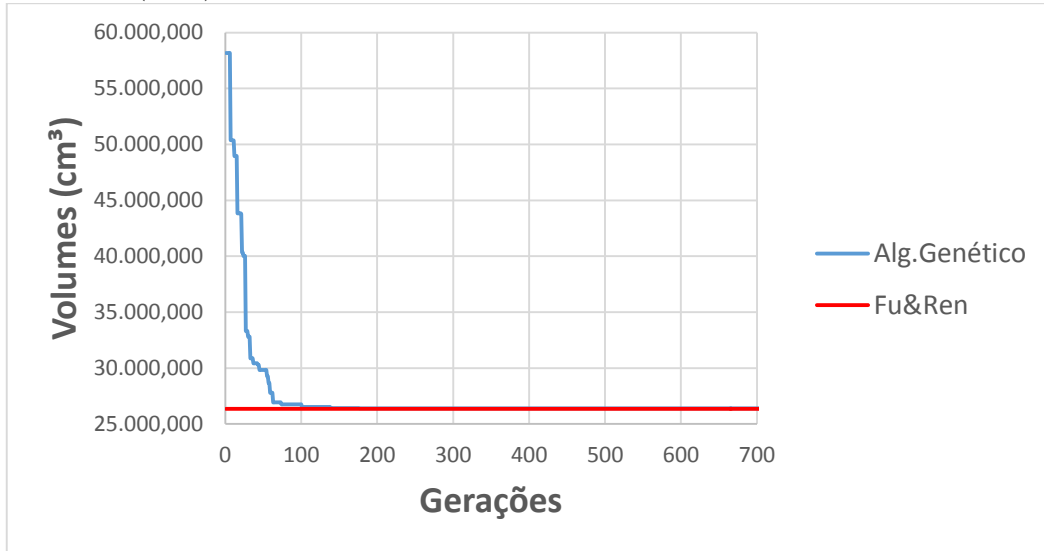
Diâmetros	Valor (cm)	Fator de Segurança
1	6.5688	0.9712
2	8.8916	0.5441
3	10.1773	0.3219
4	10.6311	0.3806

Fonte: O autor.

As figuras 28, 29, 30, 31 e 32 apresentam os dados comparativos entre os resultados obtidos com o auxílio do algoritmo genético e cada um dos valores de referência disponibilizados por Coello (2005). Pode-se observar que o valores obtidos com o AG

convergem para faixas muito próximas às tomadas como referência e isso garante a aplicação do método para o caso de estruturas de seção transversal quadrada.

Figura 28 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Fu e Ren (1992).



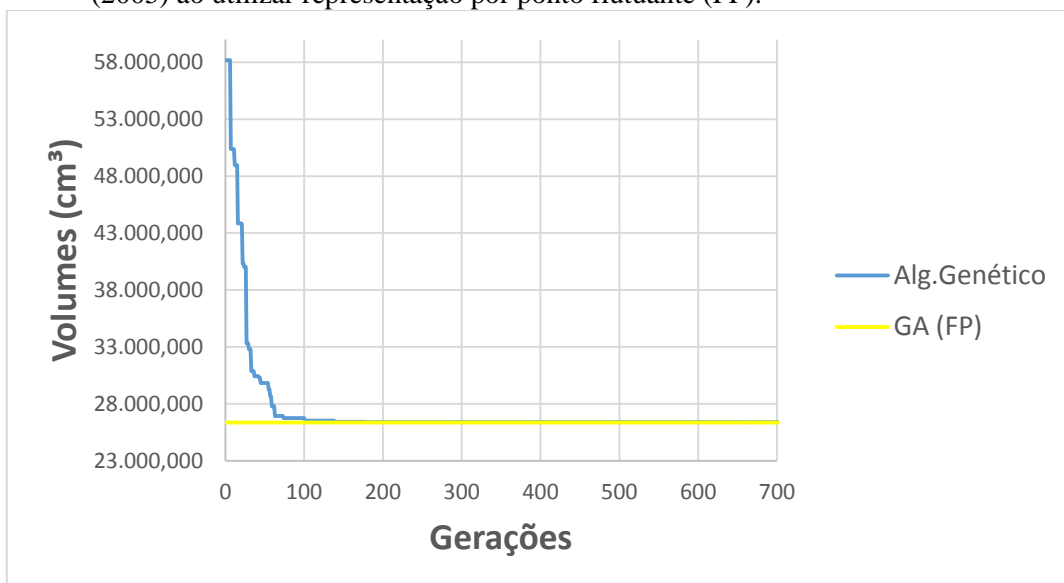
Fonte: O autor.

Tabela 20 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

Método	Volume (cm <sup>3</sup> )
Fu e Ren (1992)	26355,373
Algoritmo Genético	26374,889

Fonte: O autor.

Figura 29 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação por ponto flutuante (FP).



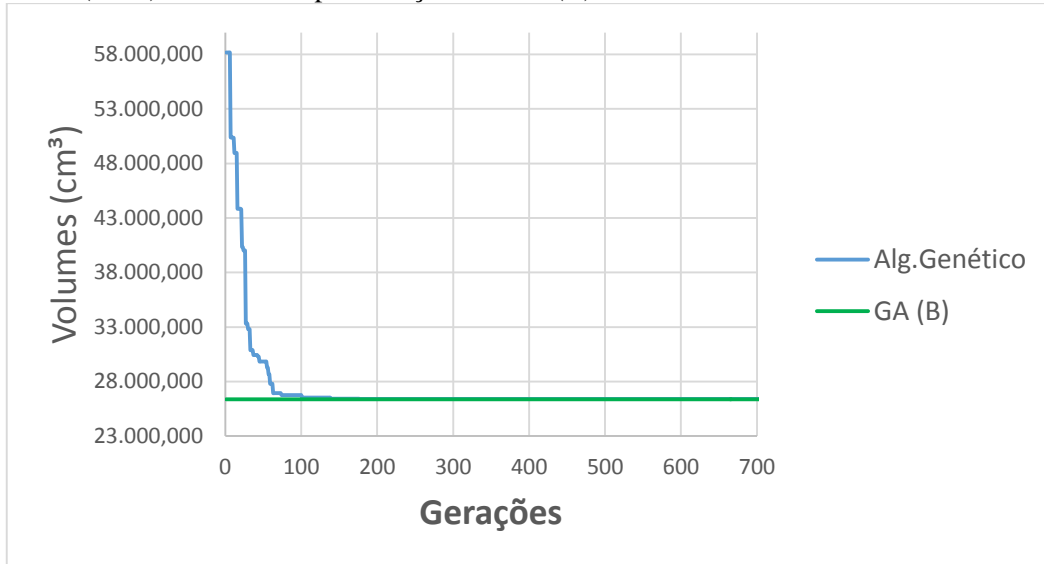
Fonte: O autor.

Tabela 21 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

Método	Volume (cm <sup>3</sup> )
FP	26363,403
Algoritmo Genético	26374,889

Fonte: O autor.

Figura 30 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação Binária (B).



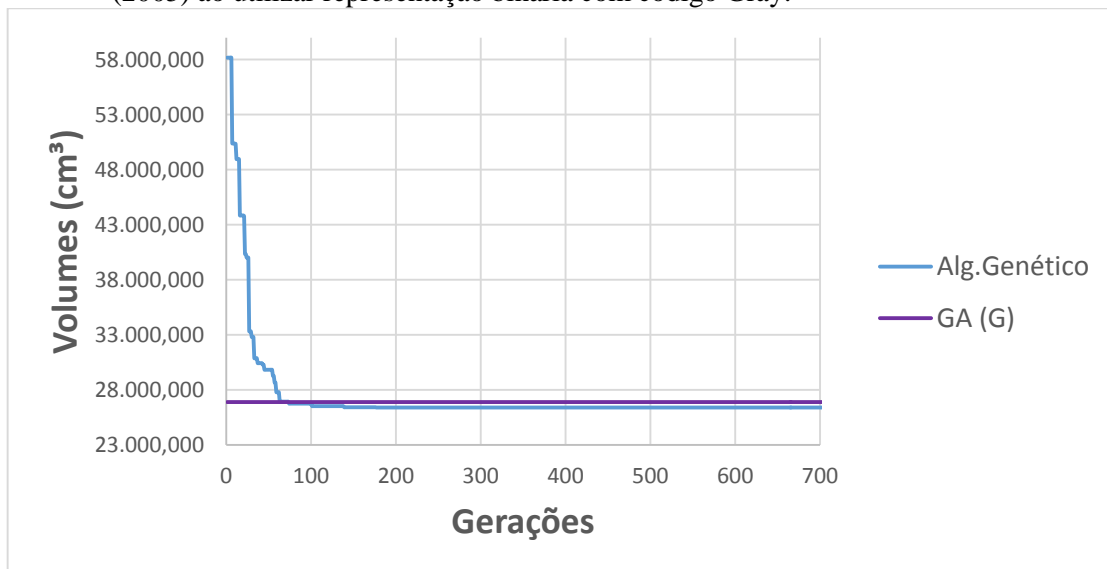
Fonte: O autor.

Tabela 22 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

Método	Volume (cm <sup>3</sup> )
B	26367,286
Algoritmo Genético	26374,889

Fonte: O autor.

Figura 31 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação binária com código Gray.



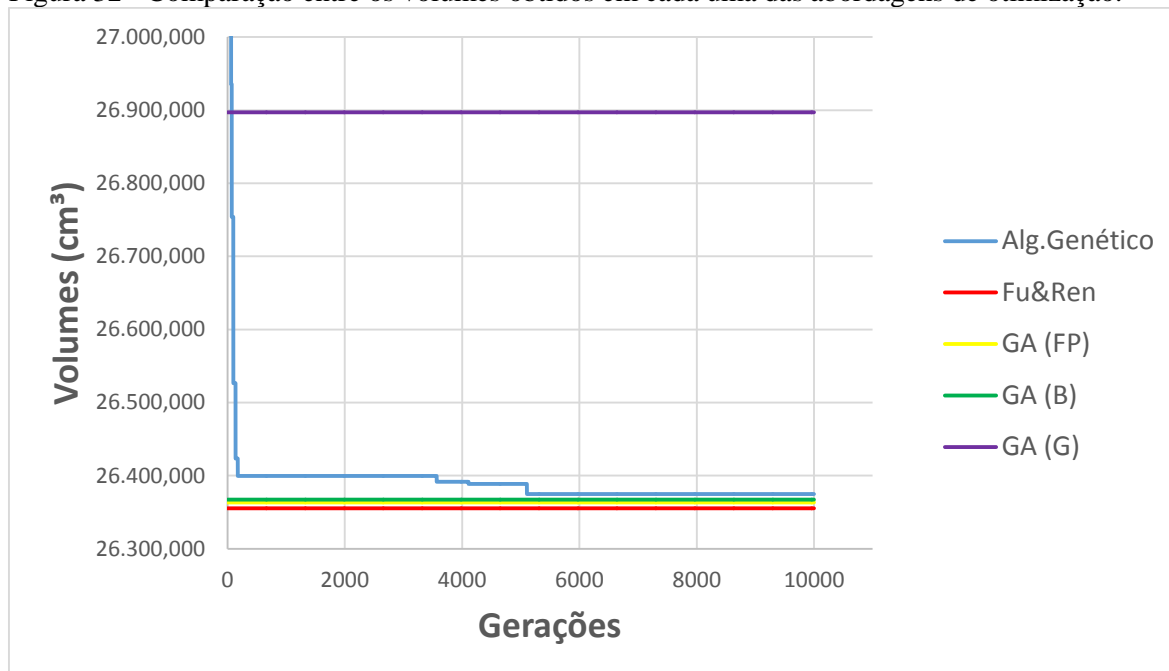
Fonte: O autor.

Tabela 23 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

<b>Método</b>	<b>Volume (cm<sup>3</sup>)</b>
Código Gray	26897,081
Algoritmo Genético	26374,889

Fonte: O autor.

Figura 32 - Comparação entre os volumes obtidos em cada uma das abordagens de otimização.



Fonte: O autor.

Tabela 24 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

<b>Método</b>	<b>Volume (cm<sup>3</sup>)</b>
Fu e Ren (1992)	26355,373
FP	26363,403
B	26367,286
Código Gray	26897,081
Algoritmo Genético	26374,889

Fonte: O autor.

Tabela 25 - Precisão dos resultados em comparação com cada um dos processos de otimização.

	<b>Fu e Ren</b>	<b>FP</b>	<b>B</b>	<b>Código Gray</b>
<b>Algoritmo Genético</b>	99,93%	99,96%	99,97%	101,98%

Fonte: O autor.

Como observado na tabela 24 o resultado obtido com o auxílio do algoritmo genético encontra-se dentro da faixa de referência, sendo mais refinado se comparado ao método empregando representação binária com código Gray. Mesmo estando abaixo dos volumes obtidos para as demais representações, o valor encontrado mostra que a precisão em relação à referência é aceitável, sendo portanto viável aplicar o algoritmo criado para a solução de problemas envolvendo estruturas de seção transversal quadrada.

### 4.2.3 Caso 3: (Seção triangular)

A tabela 26 traz os resultados obtidos para o processo de otimização de estruturas com seção transversal triangular. Neste caso, obteve-se a convergência próxima à referência dos dados fazendo-se uso de uma população de 30 indivíduos e um total de gerações igual a 10 000.

Tabela 26 - Resultados finais obtidos pelo algoritmo genético para estruturas com seção triangular.

População	Geração	CP	Penalidade	Tolerância	Volume (cm <sup>3</sup> )	CHK1	CHK2
50	700	0,8	0,700	0,001	24878,502	7,11E-01	0,700
20	700	0,8	1,000	0,001	34827,806	1,18E+00	1,000
20	700	0,8	0,700	0,001	25969,405	2,78E-01	0,700
20	700	0,8	0,580	0,001	24906,159	1,34E-01	0,580
20	700	0,6	0,580	0,001	24992,868	2,65E-05	0,000
50	700	0,6	0,700	0,001	27578,622	1,03E+00	0,700
20	700	0,6	1,000	0,001	25179,681	2,03E-01	1,000
20	700	0,6	0,700	0,001	24818,896	5,25E-04	0,000
50	700	0,8	0,700	0,010	25721,285	1,08E-03	0,000
20	700	0,8	1,000	0,010	32309,462	2,25E-02	1,000
20	700	0,8	0,580	0,010	32310,313	1,13E-01	0,580
20	700	0,6	0,580	0,010	24766,374	2,61E-04	0,000
20	700	0,6	0,500	0,010	26869,074	4,41E-03	0,000
50	700	0,6	0,700	0,010	33008,858	6,74E-03	0,000
20	700	0,6	1,000	0,010	36130,076	5,37E-01	1,000
20	700	0,6	0,700	0,010	24849,411	4,10E-01	0,700
400	50	0,8	0,580	0,010	28120,575	1,43E-02	0,580
400	100	0,8	0,580	0,010	28120,575	2,99E-01	0,580
50	700	0,6	0,580	0,010	28234,749	6,10E-01	0,580
20	10000	0,6	0,580	0,010	24730,372	0,2344	0,58
20	10000	0,8	0,580	0,900	24749,219	4,16E-04	0,000
<b>30</b>	<b>10000</b>	<b>0,8</b>	<b>0,580</b>	<b>0,900</b>	<b>24699,151</b>	<b>4,84E-02</b>	<b>0,000</b>

Fonte: O autor.

A tabela 27 apresenta os resultados finais para as dimensões do elemento estrutural obtida com o uso do algoritmo genético. Com tais dimensões os critérios de segurança e de rigidez estão atendidos, como nas situações anteriores.

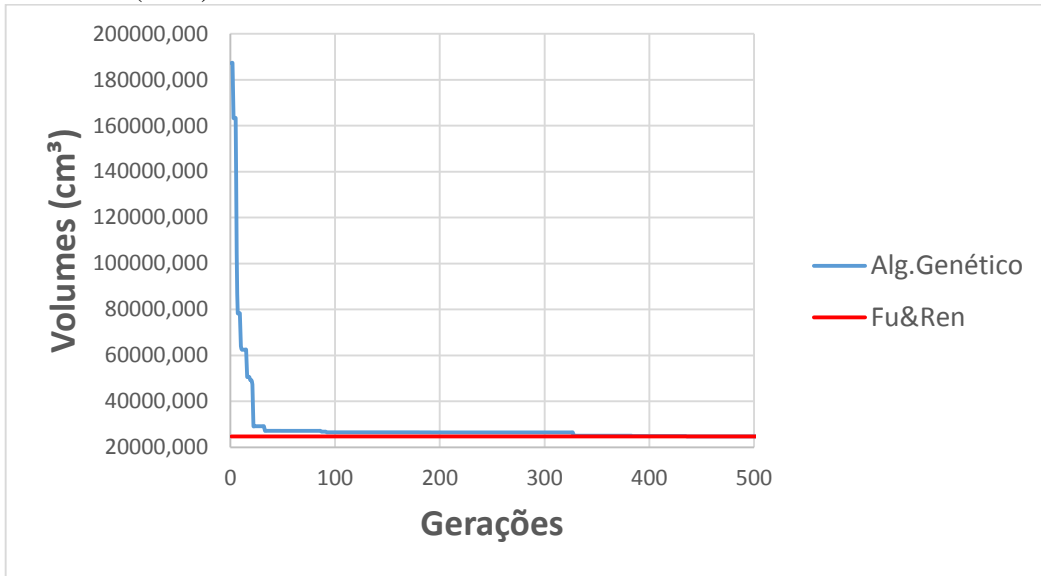
Tabela 27 - Resultados finais dos diâmetros, ou lados, obtidos com o auxílio do algoritmo genético para elementos com seção triangular.

Diâmetros	Valor (cm)	Fator de Segurança
1	9.9670	1.0000
2	12.9983	0.5880
3	14.9527	0.4384
4	15.5809	0.3920

Fonte: O autor.

As figuras 33, 34, 35, 36 e 37 mostram uma comparação entre os resultados obtidos com o auxílio do algoritmo genético e cada uma das bases de referência para o caso de elemento estrutural de seção triangular.

Figura 33 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Fu e Ren (1992).



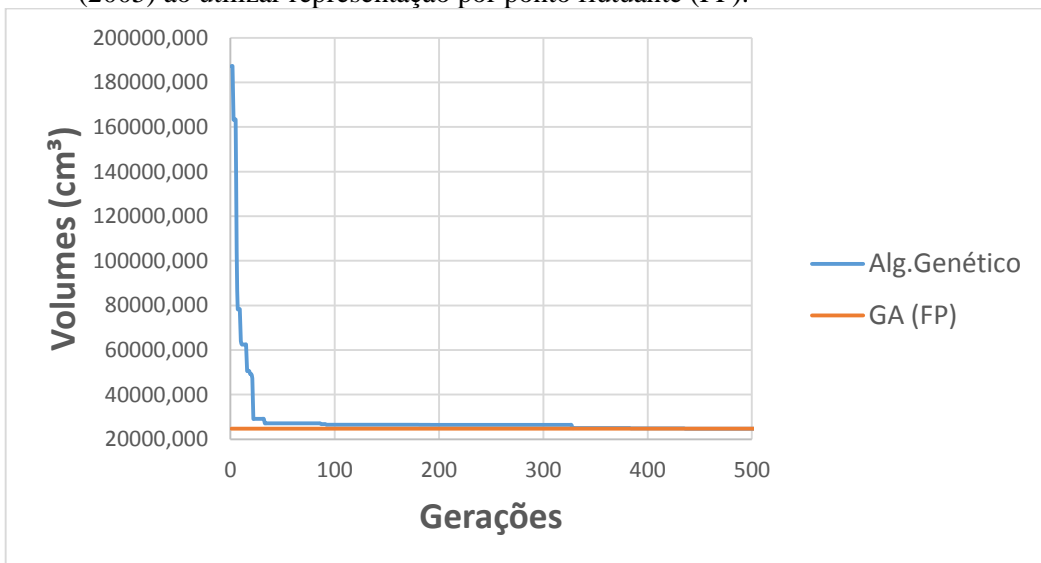
Fonte: O autor.

Tabela 28 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

<b>Método</b>	<b>Volume (cm³)</b>
Fu e Ren (1992)	24695,360
Algoritmo Genético	24699,151

Fonte: O autor.

Figura 34 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação por ponto flutuante (FP).



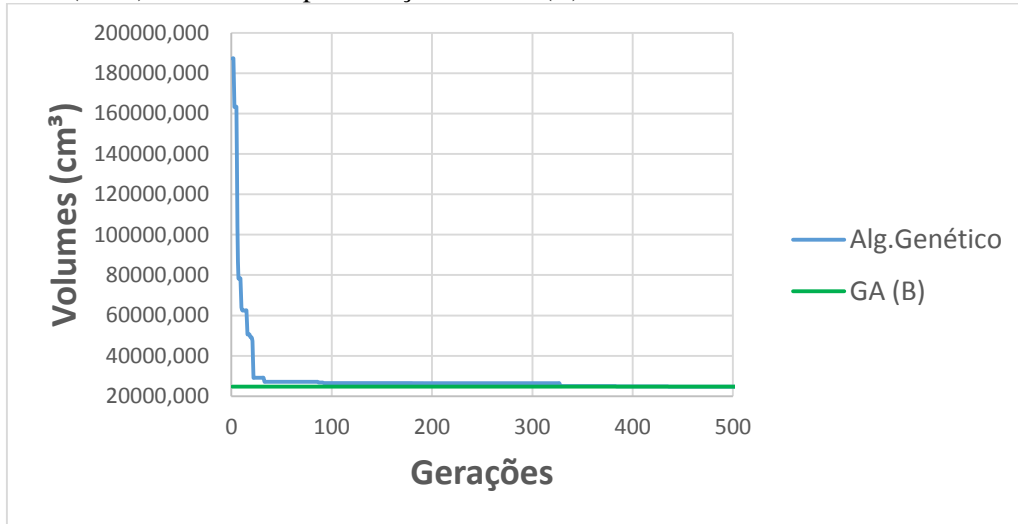
Fonte: O autor.

Tabela 29 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

Método	Volume (cm <sup>3</sup> )
FP	24740,080
Algoritmo Genético	24699,151

Fonte: O autor.

Figura 35 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação Binária (B).



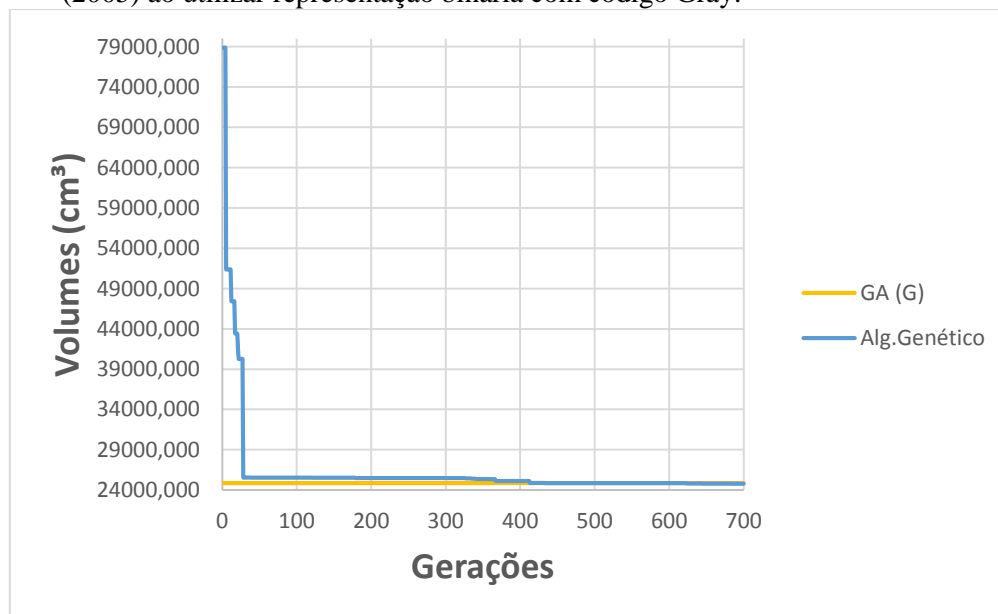
Fonte: O autor.

Tabela 30 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

Método	Volume (cm <sup>3</sup> )
B	24742,292
Algoritmo Genético	24699,151

Fonte: O autor.

Figura 36 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação binária com código Gray.



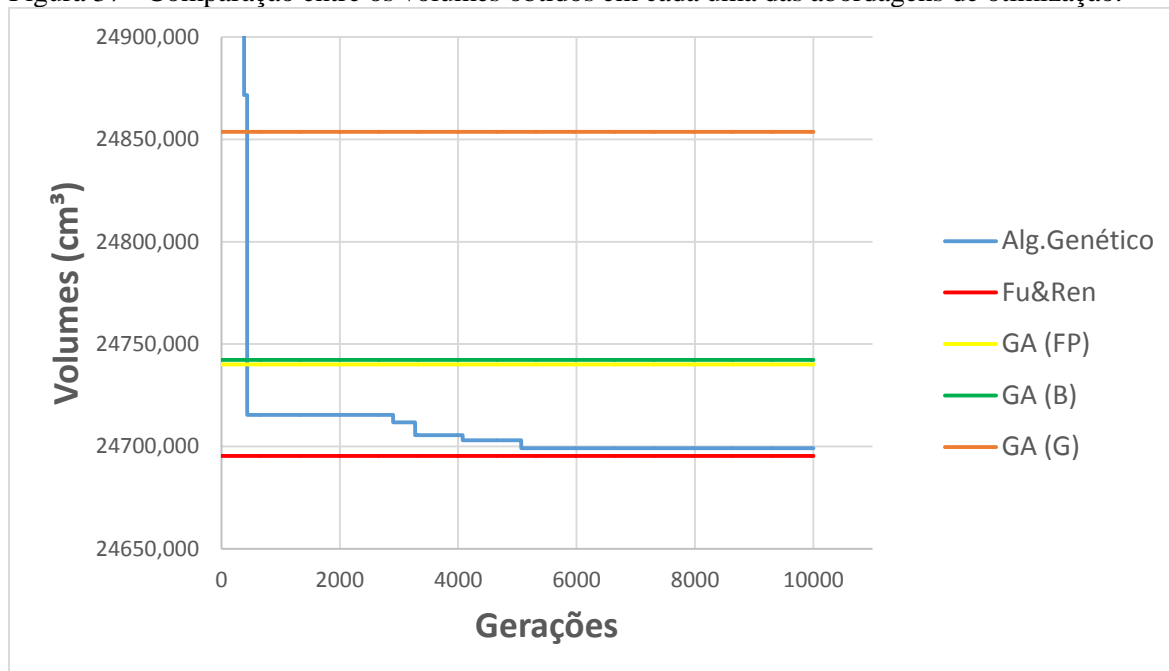
Fonte: O autor.

Tabela 31 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

<b>Método</b>	<b>Volume (cm<sup>3</sup>)</b>
Código Gray	24853,708
Algoritmo Genético	24699,151

Fonte: O autor.

Figura 37 - Comparação entre os volumes obtidos em cada uma das abordagens de otimização.



Fonte: O autor.

Tabela 32 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

<b>Método</b>	<b>Volume (cm<sup>3</sup>)</b>
Fu e Ren (1992)	24695,360
FP	24740,080
B	24742,292
Código Gray	24853,708
Algoritmo Genético	24699,151

Fonte: O autor.

Tabela 33 - Precisão dos resultados em comparação com cada um dos processos de otimização.

	<b>Fu e Ren</b>	<b>FP</b>	<b>B</b>	<b>Código Gray</b>
<b>Algoritmo Genético</b>	99,98%	100,17%	100,17%	100,63%

Fonte: O autor.

Como mostrado na figura 37 e na tabela 32, o algoritmo genético produziu valores muito próximos aos disponíveis na referência. Para este caso, obteve-se resultados melhores se comparados aos dois casos anteriores, ficando abaixo apenas do resultado apresentado por Fu e Ren (1992). Além disso, a precisão do resultado obtido é considerável a ponto de afirmar que o método criado é puramente aceitável, pois a confiança em todos os casos é praticamente de 100%.

#### 4.2.4 Caso 4: (Seção retangular)

A tabela 34 traz os resultados obtidos com o processo de otimização para os elementos estruturais de seção transversal retangular.

Para este caso a convergência foi obtida já no segundo teste de avaliação, chegando a um resultado ótimo considerável, menor do que todos os volumes constantes na referência. Por esta razão encerrou-se os testes a partir deste ponto.

A convergência foi atingida para uma população de 20 indivíduos e uma geração igual a 700. Além disso, todos os critérios estabelecidos para a formulação do problema no presente caso foram atendidos.

Tabela 34 - Resultados finais obtidos pelo algoritmo genético para estruturas com seção retangular.

<b>População</b>	<b>Geração</b>	<b>CP</b>	<b>Penalidade</b>	<b>Tolerância</b>	<b>Volume(cm<sup>3</sup>)</b>	<b>CHK1</b>	<b>CHK2</b>
20	700	0.8	0,700	0,001	27884,022	1,94E+00	1,400
<b>20</b>	<b>700</b>	<b>0,6</b>	<b>0,700</b>	<b>0,001</b>	<b>15605,310</b>	<b>5,62E-04</b>	<b>0,000</b>

Fonte: O autor.

A tabela 35 apresenta os resultados finais obtidos para a dimensão  $D_i$  do elemento estrutural retangular considerado. Nesta situação admitiu-se que a segunda dimensão do elemento, a base, seja mantida constante e de valor igual a 10 centímetros.

No modelo de cálculo empregado neste trabalho Coello (2005) não especifica o valor para a dimensão da base dos elementos de seção transversal retangular empregado quando da obtenção dos seus resultados, ficando, portanto, implícito o critério de delimitação para tal dimensão nos estudos de referência.

O valor de 10 centímetros empregado no presente trabalho foi obtido através de análises sucessivas, por tentativas-erro, até ser estabelecido o valor que melhor se enquadrasse para a determinação dos resultados procurados.

Tabela 35 - Resultados finais dos diâmetros, ou lados, obtidos com o auxílio do algoritmo genético para elementos com seção retangular.

<b>Indivíduo</b>	<b>bw (cm)</b>	<b>Hw (cm)</b>	<b>Fator de Segurança</b>
1	10	4.5444	0.7153
2	10	4.8887	0.8799
3	10	5.3706	0.8009
4	10	5.6460	0.7619

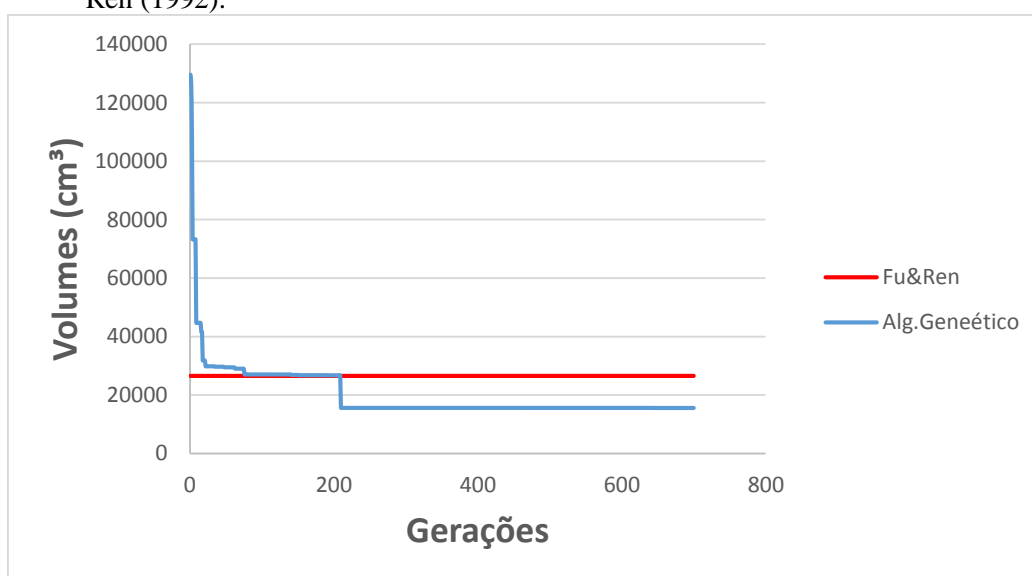
Fonte: O autor.

Na tabela 35 o termo Hw corresponde à variável que será determinada nos processos iterativos do programa de otimização. O termo bw refere-se à dimensão da base da seção transversal do elemento.

As figuras 38, 39, 40, 41 e 42 apresentam os resultados comparativos entre o volume obtido pelo algoritmo genético e cada uma das bases de referência.

Os resultados mostram que o valor obtido pelo algoritmo genético é o mais econômico dentre todos os métodos empregados por Coello (2005), sendo portanto correto afirmar que o algoritmo criado está apto a ser utilizado em demais aplicações de estruturas carregadas axialmente por compressão.

Figura 38 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Fu e Ren (1992).



Fonte: O autor.

Tabela 36 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

<b>Método</b>	<b>Volume (cm³)</b>
Fu e Ren	26513,541
Algoritmo Genético	15605,310

Fonte: O autor.

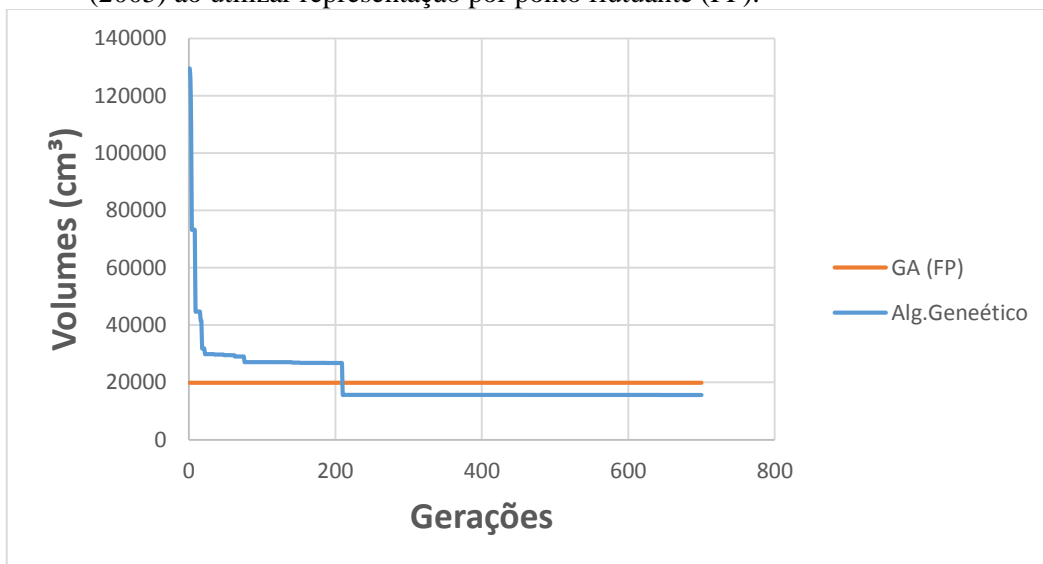
A diferença notável em relação ao volume obtido empregando o algoritmo de otimização e o obtido pela referência, da ordem de +69,90%, se justifica pelo tipo de seção transversal analisada. O elemento estrutural em estudo possui seção transversal retangular e por esta razão, como mostrado na equação 20, haverá uma restrição à mais a ser verificada em comparação com os demais elementos estruturais, a dimensão  $D_i$  e a largura  $b$ , além da verificação quanto aos valores de área permitidos. Em razão disso poderá ocorrer maiores

somas de penalidades por restrição em cada iteração por indivíduo, o que resultará num peso relativamente mais elevado para a função aptidão.

A maior possibilidade de penalização por iteração acarretará no crescimento do peso das populações e, em contrapartida, a função peso também se tornará maior, o que implicará, quando do processo de inversão da função para obter o mínimo de volume, num valor relativamente menor para o peso da função. Esse fato se reflete no baixo peso encontrado para os volumes das seções retangulares analisadas e reforça o papel importantíssimo para a adoção dos fatores de penalidade necessários para a execução de cada problema.

Para os demais resultados obtidos neste caso de seção transversal retangular a definição para a discrepância dos resultados é análoga.

Figura 39 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação por ponto flutuante (FP).



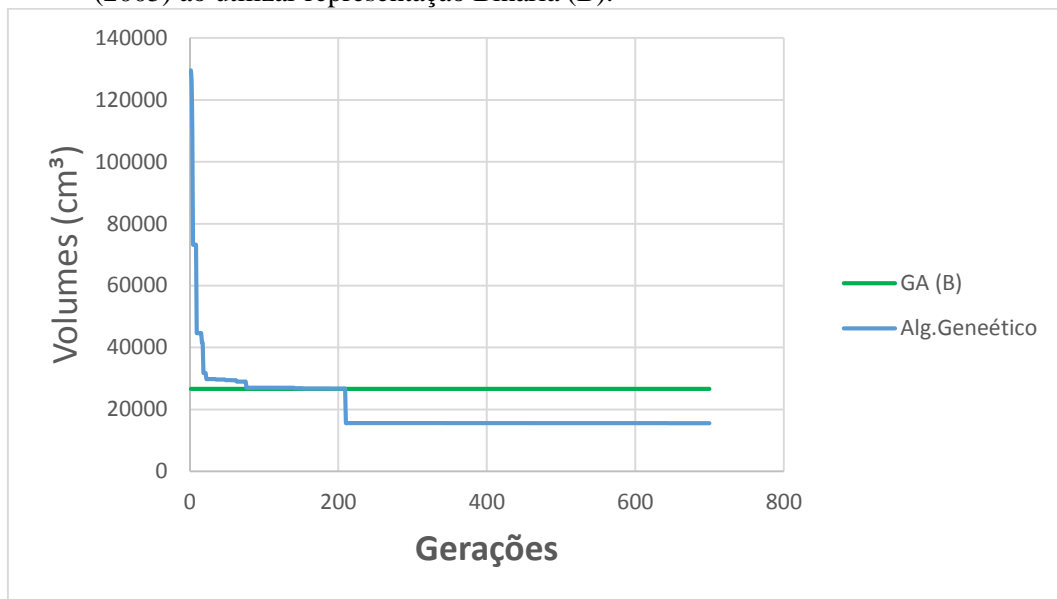
Fonte: O autor.

Tabela 37 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

<b>Método</b>	<b>Volume (cm<sup>3</sup>)</b>
FP	19891,596
Algoritmo Genético	15605,310

Fonte: O autor.

Figura 40 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação Binária (B).



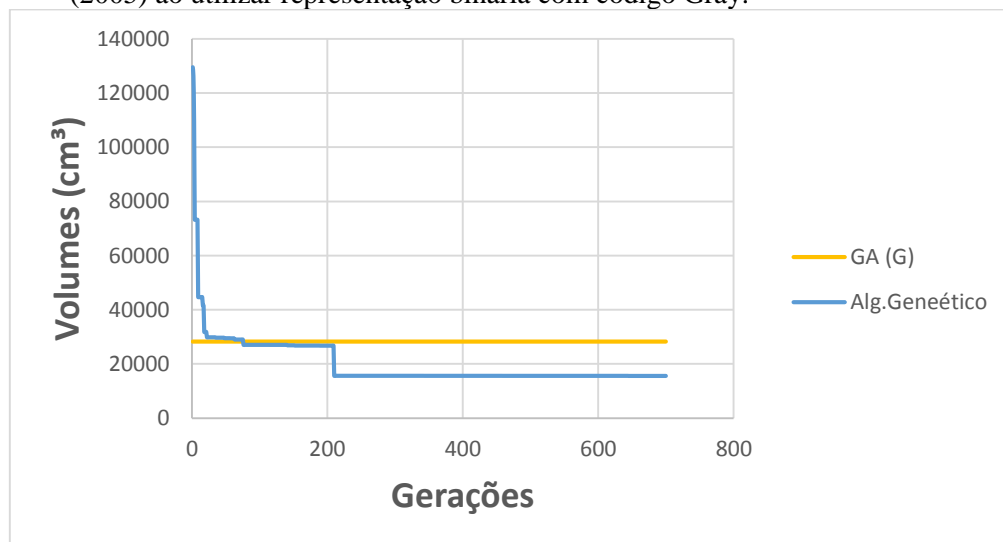
Fonte: O autor.

Tabela 38 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

Método	Volume (cm <sup>3</sup> )
B	26657,469
Algoritmo Genético	15605,310

Fonte: O autor.

Figura 41 - Comparação entre o volume final obtido com o algoritmo genético e o obtido por Coello (2005) ao utilizar representação binária com código Gray.



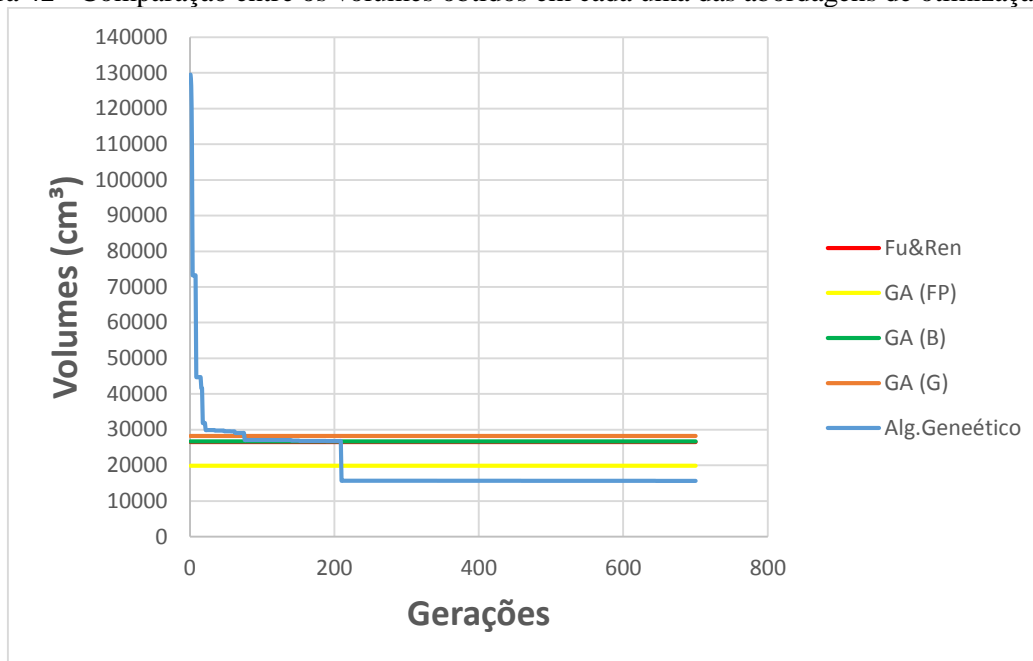
Fonte: O autor.

Tabela 39 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

Método	Volume (cm <sup>3</sup> )
Código Gray	28227,829
Algoritmo Genético	15605,310

Fonte: O autor.

Figura 42 - Comparação entre os volumes obtidos em cada uma das abordagens de otimização.



Fonte: O autor.

Tabela 40 - Resultados finais para o volume obtido no processo de otimização.

Método	Volume (cm <sup>3</sup> )
Fu e Ren (1992)	26513,541
FP	19891,596
B	26657,469
Código Gray	28227,829
Algoritmo Genético	15605,310

Fonte: O autor.

Tabela 41 - Precisão dos resultados em comparação com cada um dos processos de otimização.

	Fu e Ren	FP	B	Código Gray
<b>Algoritmo Genético</b>	169,90%	127,47%	170,82%	180,89%

Fonte: O autor.

Como mostrado na figura 36 e nas tabelas 40 e 41, o algoritmo genético consegue gerar resultados bastante aceitáveis do ponto de vista econômico, sendo, portanto, mais confiável se comparado aos demais métodos de otimização mencionados por Coello (2005).

Com isso, pode-se afirmar que o algoritmo genético criado para solução de problemas envolvendo estruturas carregadas axialmente por compressão e de seção retangular, com base constante, pode ser empregado para solução de casos semelhantes ao tratado neste trabalho. Deve-se, no entanto, atentar-se à correta determinação da dimensão que assumirá valor constante na análise de dados. Tal dimensão deve ser escolhida de modo que os indivíduos obtidos não sofram penalidade sucessivas durante o processo de otimização.

### 4.3 CASOS PEDRESCHI (2015)

Os resultados obtidos ao trabalhar com os problemas descrito por Coello (2005) e sua posterior validação possibilitam empregar o programa de otimização para aplicação em demais problemas. Desse modo, os resultados obtidos pelo algoritmo genético utilizando o modelo proposto por Pedreschi (2015) são apresentados nos itens 4.3.1 e 4.3.2.

#### 4.3.1 Volumes finais para os protótipos da série 1

Nos itens 4.3.1.1 a 4.3.1.5 são apresentados os resultados finais dos volumes obtidos para cada uma das colunas da série 1 de protótipos. Alguns dos elementos descritos não atingiram o fator de segurança desejado, sendo, portanto, necessário impor condições restritivas mais duras sobre tais elementos caso as dimensões descritas sejam utilizadas para um possível dimensionamento em cada caso.

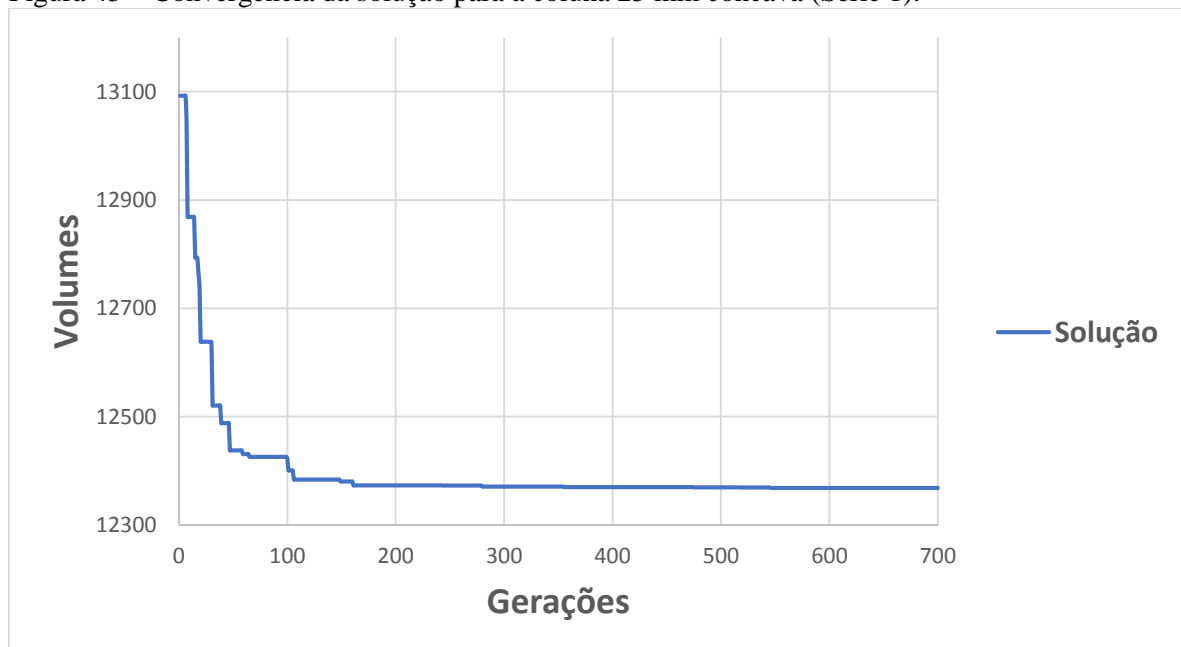
##### 4.3.1.1 Coluna 25 mm côncava

Tabela 42 – Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 25mm côncava (Série 1).

Carga (KN)	Fck(Mpa)	População	Gerações	CP	Penalidade	Tolerância	Volume(cm <sup>3</sup> )
83,214	21,2	20	700	0,6	0,01	1	12368,356

Fonte: O autor.

Figura 43 – Convergência da solução para a coluna 25 mm côncava (Série 1).



Fonte: O autor.

Tabela 43 – Diâmetros finais para a coluna 25mm côncava (Série 1).

<b>Diâmetros</b>	<b>Valor (cm)</b>	<b>Fator de Segurança</b>
1	9,0000	0,6318
2	8,1010	0,7798
3	6,0005	1,421
4	6,000	1,422

Fonte: O autor.

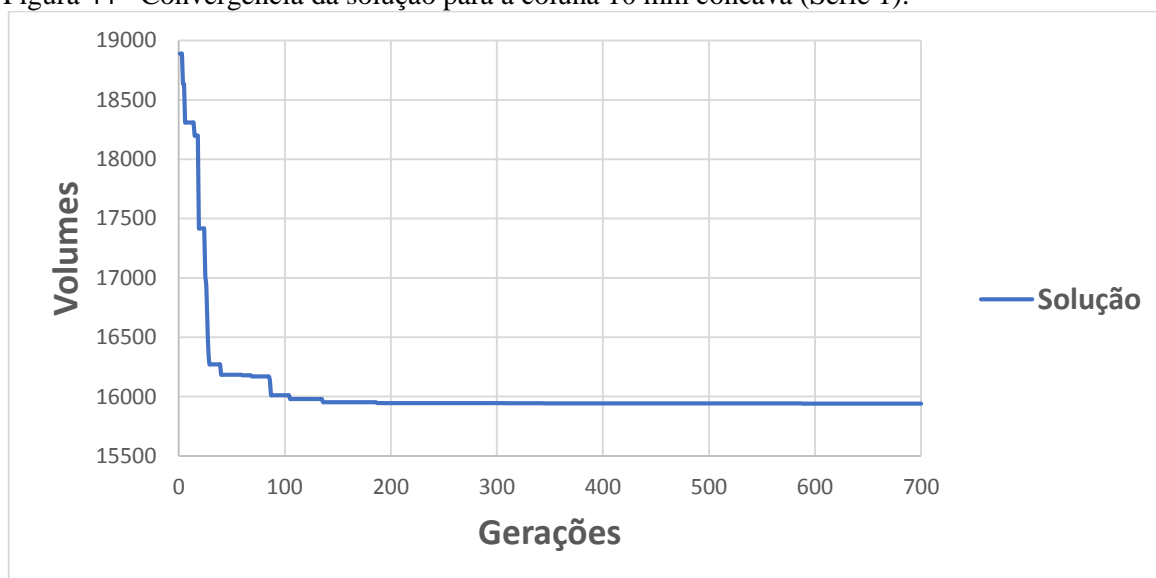
#### 4.3.1.2 Coluna 10 mm côncava

Tabela 44 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 10mm côncava (Série 1).

<b>Carga(KN)</b>	<b>Fck(Mpa)</b>	<b>População</b>	<b>Gerações</b>	<b>CP</b>	<b>Penalidade</b>	<b>Tolerância</b>	<b>Volume(cm<sup>3</sup>)</b>
126,429	21,3	20	700	0,8	0,01	1	13697,129

Fonte: O autor.

Figura 44 - Convergência da solução para a coluna 10 mm côncava (Série 1).



Fonte: O autor.

Tabela 45 - Diâmetros finais para a coluna 25mm côncava (Série 1).

<b>Diâmetros</b>	<b>Valor (cm)</b>	<b>Fator de Segurança</b>
1	9,4620	0,8448
2	7,5005	1,223
3	6,5000	1,789
4	8,5017	0,9865

Fonte: O autor.

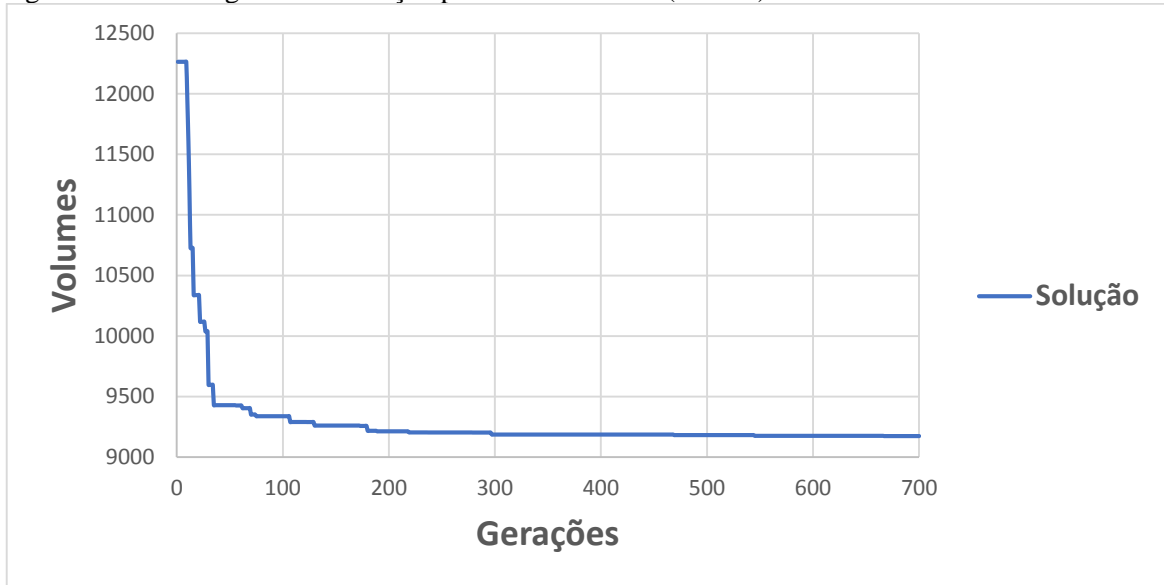
#### 4.3.1.3 Coluna reta

Tabela 46 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna Reta (Série 1).

<b>Carga (KN)</b>	<b>Fck(Mpa)</b>	<b>População</b>	<b>Gerações</b>	<b>CP</b>	<b>Penalidade</b>	<b>Tolerância</b>	<b>Volume(cm<sup>3</sup>)</b>
122,143	21,2	20	700	0,8	0,01	1	9178,297

Fonte: O autor.

Figura 45 - Convergência da solução para a coluna Reta (Série 1).



Fonte: O autor.

Tabela 47 - Diâmetros finais para a coluna Reta (Série 1).

Diâmetros	Valor (cm)	Fator de Segurança
1	9,0010	,9035
2	8,0029	1,094
3	6,0012	2,024
4	5,0000	2,931

Fonte: O autor.

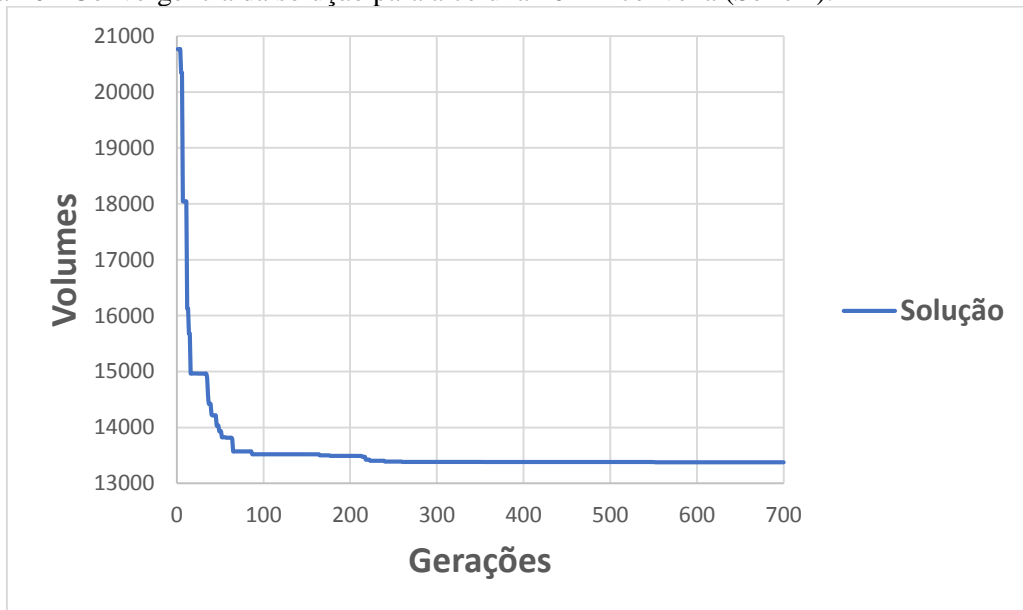
#### 4.3.1.4 Coluna 10 mm convexa

Tabela 48 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 10mm convexa (Série 1).

Carga (KN)	Fck(Mpa)	População	Gerações	CP	Penalidade	Tolerância	Volume(cm <sup>3</sup> )
129,286	27,9	20	700	0,8	0,01	1	13378,201

Fonte: O autor.

Figura 46 - Convergência da solução para a coluna 10mm convexa (Série 1).



Fonte: O autor.

Tabela 49 - Diâmetros finais para a coluna 10mm convexa (Série 1).

Diâmetros	Valor (cm)	Fator de Segurança
1	7,0020	1,203
2	6,8000	1,276
3	7,0000	0,6017
4	8,5000	0,8133

Fonte: O autor.

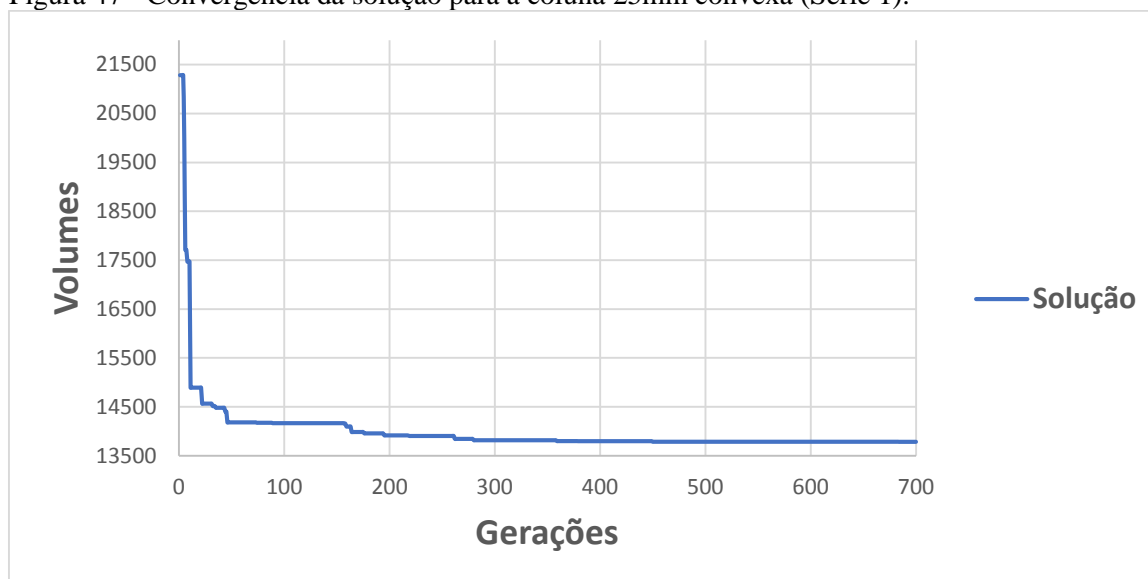
#### 4.3.1.5 Coluna 25 mm convexa

Tabela 50 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 25mm convexa (Série 1).

Carga (KN)	Fck(Mpa)	População	Gerações	CP	Penalidade	Tolerância	Volume(cm <sup>3</sup> )
131,786	23,4	20	700	0,8	0,01	1	13780,915

Fonte: O autor.

Figura 47 - Convergência da solução para a coluna 25mm convexa (Série 1).



Fonte: O autor.

Tabela 51 - Diâmetros finais para a coluna 25mm convexa (Série 1).

Diâmetros	Valor (cm)	Fator de Segurança
1	8,0007	1,107
2	7,1042	0,9847
3	7,3000	1,340
4	7,4000	1,306

Fonte: O autor.

Na tabela 52 é apresentado o resumo dos resultados finais para as colunas da série 1 de protótipos. Como pode-se observar os volumes obtidos encontraram-se abaixo do volume inicial calculado e o caso da não correspondência em relação ao critério do fator de segurança pode ser justificado pela dosagem do concreto utilizado no ensaio.

As colunas da série 1 foram moldadas e preparadas com concreto simples, sem a utilização de aditivos que favorecessem o ganho de resistência dos elementos. Por esta razão alguns dos resultados apresentaram-se não tão atrativos em relação aos critérios de rigidez empregados no programa de otimização.

Tabela 52 – Volumes finais para as colunas da série 1 de protótipos.

SÉRIE 1			
Volume total inicial dos elementos moldados: 13797,468 cm³			
Protótipo	População	Geração	Volume (cm³)
25mm côncava	20	700	12368,356
10mm côncava	20	700	13697,129
Reto	20	700	9178,297
10mm convexo	20	700	13378,201
25mm convexo	20	700	13780,915

Fonte: O autor.

### 4.3.2 Volumes finais para os protótipos da série 2

Nos itens 4.3.2.1 a 4.3.2.5 são apresentados os resultados obtidos para as colunas da série 2 de protótipos. Tanto os volumes quanto os critérios de rigidez e segurança determinados pelo algoritmo genético nesta situação encontraram-se abaixo dos limites pré-estabelecidos, sendo, portanto, bem mais confiáveis em relação aos protótipos da série 1. O fato se justifica, novamente, pelas características do traço empregado na confecção das peças estudadas. Para os elementos da série 2 de protótipos empregou-se a mesma proporção de material utilizado na série 1. No entanto, nesta situação resolveu-se por adicionar aditivos plastificantes à mistura. A adição de aditivos diminui o uso de água necessário para preparar a mesma quantidade de material (no caso, o concreto), resultando num ganho de resistência dos elementos moldados.

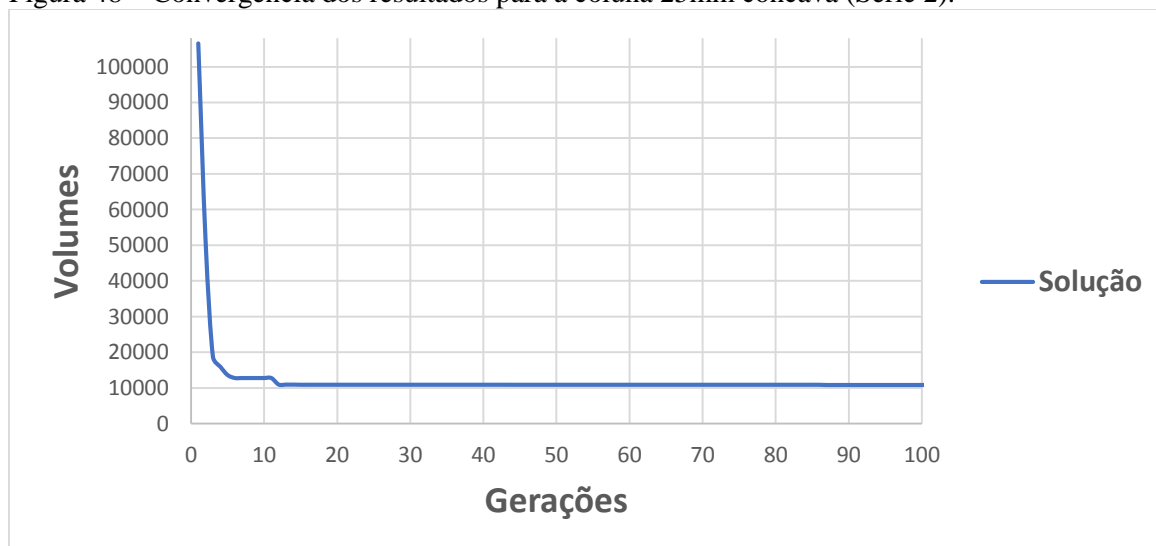
#### 4.3.2.1 Coluna 25mm côncava

Tabela 53 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 25mm côncava (Série 2).

Carga (KN)	Fck(Mpa)	População	Gerações	CP	Penalidade	Tolerância	Volume(cm <sup>3</sup> )
153,214	42,6	20	700	0,8	0,01	1	10687,871

Fonte: O autor.

Figura 48 – Convergência dos resultados para a coluna 25mm côncava (Série 2).



Fonte: O autor.

Tabela 54 - Diâmetros finais para a coluna 25mm côncava (Série 2).

Diâmetros	Valor (cm)	Fator de Segurança
1	9,0110	0,5543
2	7,0029	0,8691
3	7,0611	0,9185
4	7,5487	0,8055

Fonte: O autor.

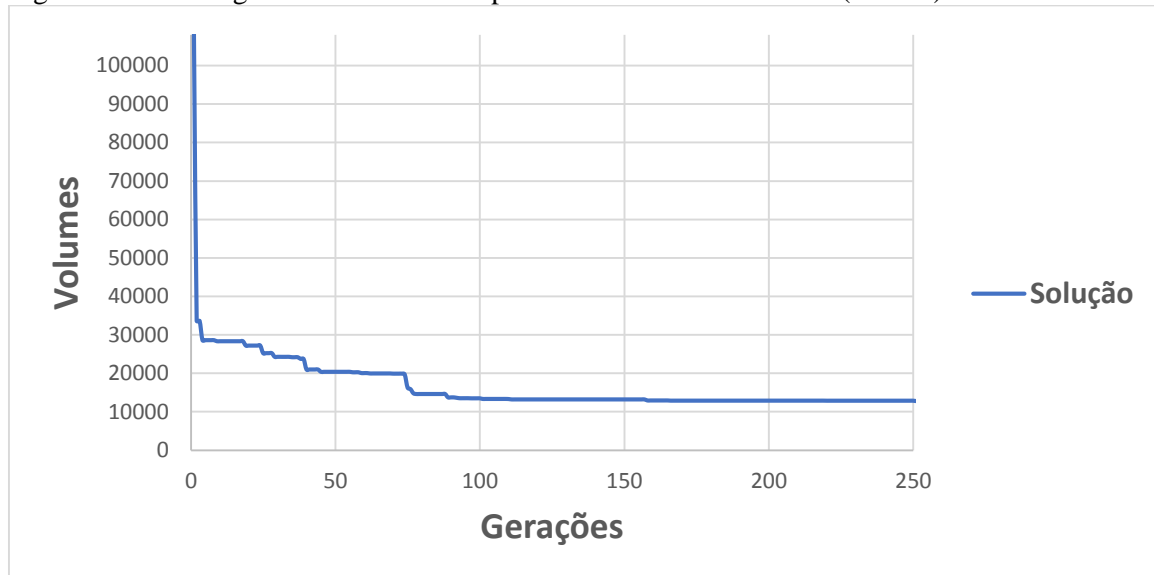
#### 4.3.2.2 Coluna 10 mm côncava

Tabela 55 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 10mm côncava (Série 2).

<b>Carga (KN)</b>	<b>Fck(Mpa)</b>	<b>População</b>	<b>Gerações</b>	<b>CP</b>	<b>Penalidade</b>	<b>Tolerância</b>	<b>Volume(cm<sup>3</sup>)</b>
156,429	40,6	20	4500	0,8	0,01	1	12689,254

Fonte: O autor.

Figura 49 - Convergência dos resultados para a coluna 10mm côncava (Série 2).



Fonte: O autor.

Tabela 56 - Diâmetros finais para a coluna 10mm côncava (Série 2).

<b>Diâmetros</b>	<b>Valor (cm)</b>	<b>Fator de Segurança</b>
1	11,0011	0,3999
2	8,0010	0,7632
3	7,0111	0,9980
4	7,2990	0,9188

Fonte: O autor.

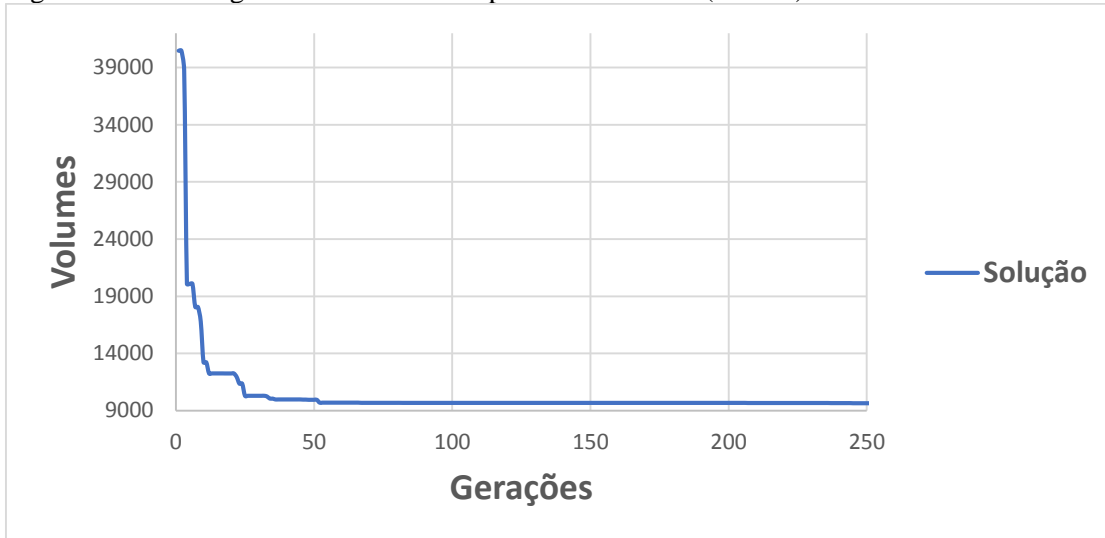
#### 4.3.2.3 Coluna reta

Tabela 57 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna Reta (Série 2).

<b>Carga (KN)</b>	<b>Fck(Mpa)</b>	<b>População</b>	<b>Gerações</b>	<b>CP</b>	<b>Penalidade</b>	<b>Tolerância</b>	<b>Volume(cm<sup>3</sup>)</b>
154,643	43,5	40	700	0,8	0,01	1	9633,872

Fonte: O autor.

Figura 50 - Convergência dos resultados para a coluna reta (Série 2).



Fonte: O autor.

Tabela 58 - Diâmetros finais para a coluna Reta (Série 2).

Diâmetros	Valor (cm)	Fator de Segurança
1	6,9062	0,9490
2	6,9037	0,9368
3	7,1591	0,8829
4	7,4903	0,8068

Fonte: O autor.

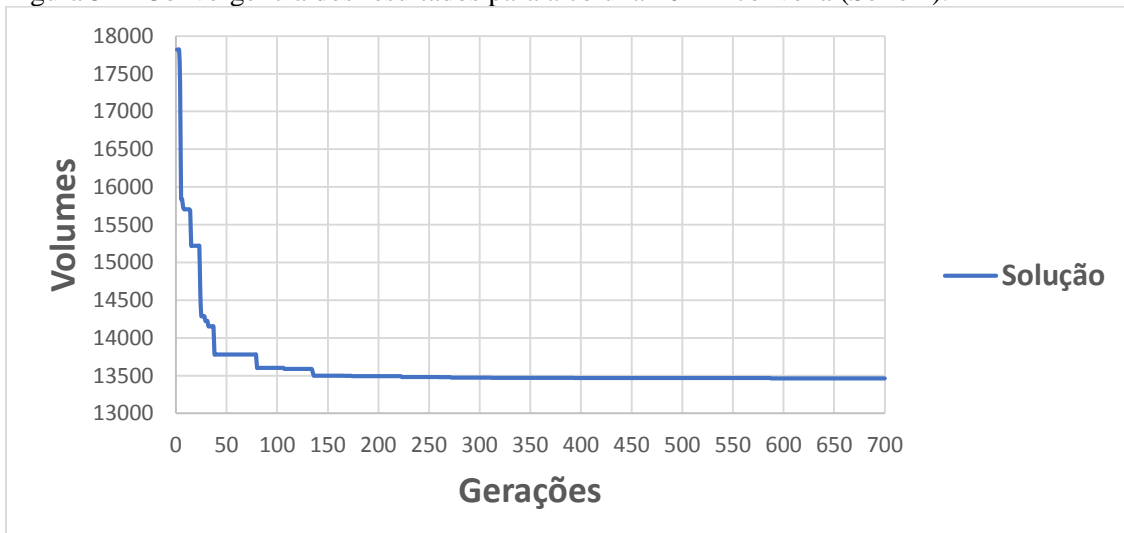
#### 4.3.2.4 Coluna 10 mm convexa

Tabela 59 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 10mm convexa (Série 2).

Carga (KN)	Fck(Mpa)	População	Gerações	CP	Penalidade	Tolerância	Volume(cm <sup>3</sup> )
134,286	43,5	20	700	0,8	0,01	1	13461,285

Fonte: O autor.

Figura 51 - Convergência dos resultados para a coluna 10mm convexa (Série 2).



Fonte: O autor.

Tabela 60 - Diâmetros finais para a coluna 10mm convexa (Série 2).

Diâmetros	Valor (cm)	Fator de Segurança
1	6,5000	0,9268
2	6,9009	0,7754
3	7,4000	0,7123
4	7,8000	0,6418

Fonte: O autor.

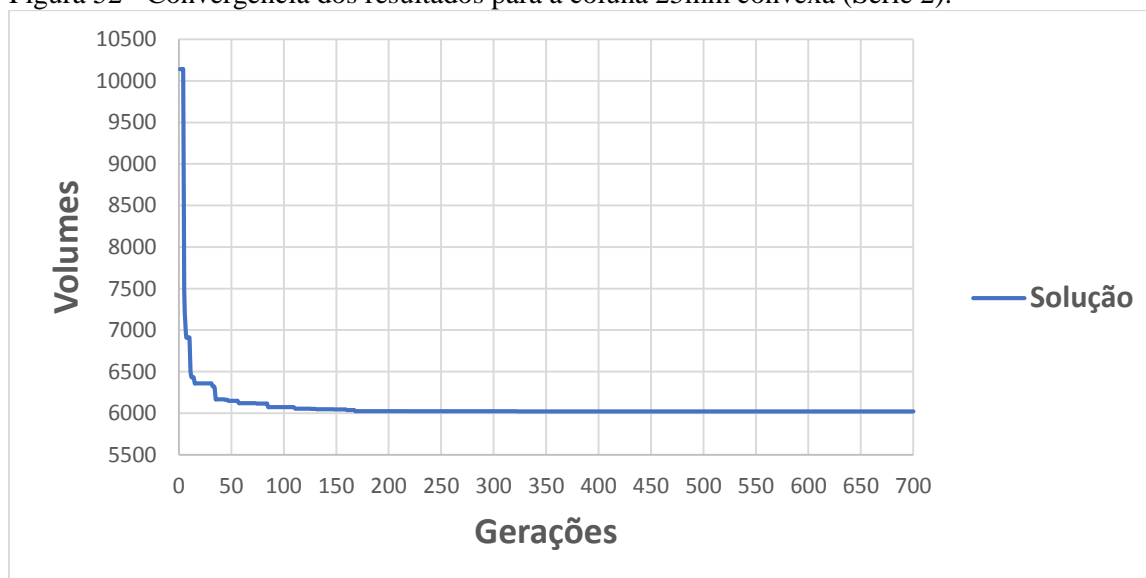
#### 4.3.2.5 Coluna 25 mm convexa

Tabela 61 - Parâmetros de entrada e volume final para a coluna 25mm convexa (Série 2).

Carga (KN)	Fck(Mpa)	População	Gerações	CP	Penalidade	Tolerância	Volume(cm <sup>3</sup> )
72,857	42,6	20	700	0,8	0,01	1	6020,757

Fonte: O autor.

Figura 52 - Convergência dos resultados para a coluna 25mm convexa (Série 2).



Fonte: O autor.

Tabela 62 - Diâmetros finais para a coluna 25mm convexa (Série 2).

Diâmetros	Valor (cm)	Fator de Segurança
1	4,0020	0,8476
2	5,2552	0,7773
3	6,0513	0,5636
4	6,5537	0,5037

Fonte: O autor.

A tabela 63 apresentada o resumo dos resultados obtidos para as colunas da série 2 de protótipos analisadas. Os volumes se comportaram como desejado, assumindo valores abaixo do calculado para a confecção das peças, e os fatores de segurança corresponderam aos critérios estabelecidos na criação do algoritmo genético.

Tabela 63 – Volumes finais para as colunas da série 2 de protótipos.

<b>SERIE 2</b>			
Volume total inicial dos elementos moldados:		13797,468 cm <sup>3</sup>	
<b>Protótipo</b>	<b>População</b>	<b>Geração</b>	<b>Volume (cm<sup>3</sup>)</b>
25mm côncava	20	700	10687,871
10mm côncava	20	4500	12689,254
Reto	40	700	9633,872
10mm convexo	20	700	13461,285
25mm convexo	20	700	6020,757

Fonte: O autor.

Os resultados mostrados nas tabelas 52 e 63 comprovam que o programa de otimização consegue responder satisfatoriamente ao objetivo inicialmente proposto, embora alguns dos resultados obtidos para a série 1 de protótipos tenha retornado valores para os fatores de segurança acima do limite, 1. Como comentado, a não conformidade dos critérios estabelecidos para a série 1 se baseou no traço empregado para a moldagem dos corpos de prova, sendo portanto necessário realizar mudanças nas proporções, ou uso de aditivos, para a produção do concreto empregado. Os volumes, que eram os critérios principais de aceitação do método, no entanto, encontraram-se em faixas aceitáveis e tornam válido o emprego do algoritmo.

De acordo com o que foi apresentado na seção 2.4 o volume de concreto empregado para a confecção das peças foi de 13797,468 cm<sup>3</sup> (centímetros cúbicos). Os volumes obtidos com a implementação do código genético se situaram em intervalos abaixo do permitido, sendo correto afirmar, portanto, que o algoritmo de otimização de volumes de estruturas sujeitas a carregamento axial de compressão ao longo do eixo pode ser aplicado em situações semelhantes de carregamento.

## CONCLUSÕES

O modelo de otimização de volumes para estruturas submetidas a esforços de compressão axial desenvolvido neste trabalho cumpriu com o objetivo inicial proposto, ou seja, minimizar os volumes e obter configurações mais econômicas respeitando os critérios de segurança dispostos na NBR 6118/2014.

A aplicação do algoritmo genético como ferramenta para validação dos casos explanados neste texto se mostrou bastante confiável devido à porcentagem de precisão obtida em cada situação. Os modelos disponibilizados por Coello (2005), e que foram tomados como referência para o cálculo do volume final, serviram para confirmar a validação de emprego do algoritmo, com resultados para os fatores de segurança dentro dos limites exigidos. Enquanto que os modelos disponibilizados por Pedreschi (2015) serviram para confirmar o emprego do método a um caso real de carregamento.

Quanto aos casos apresentados por Pedreschi (2015), pôde-se obter configurações dimensionais dentro dos limites estabelecidos, com volumes abaixo do volume inicial calculado para os elementos reais, no entanto, os protótipos da série 1 apresentaram características físicas não tão desejáveis devido aos valores de resistência menores se comparados aos protótipos da série 2. Como comentado no item referente aos resultados, uma das razões poderia ter sido a composição do traço empregado na mistura, que dispensou a utilização de aditivo plastificante. A utilização do aditivo proporcionaria ganho de resistência e aumentaria a performance do algoritmo visto que este é um dos parâmetros de entrada para a execução do programa de otimização.

Embora alguns dos critérios físicos de avaliação não tenham respondido de forma positiva ao programa de otimização, o algoritmo genético mostrou-se bastante útil quanto ao critério de busca por soluções ótimas para os problemas estudados, confirmando sua validação como uma ferramenta viável para a obtenção de volumes ótimos de estruturas submetidas a esforços axiais de compressão.

Como este trabalho foi desenvolvido para determinar volumes ótimos de estruturas homogêneas, compostas apenas por aço ou concreto por exemplo, há a possibilidade de ampliação do estudo para determinação da configuração ótima de uma estrutura de concreto armado, pilares, de forma mais aprimorada. Determinando a taxa de aço que seria necessária para confecção das peças estruturais poder-se-ia estimar com grande precisão o custo deste tipo de elemento dentro do orçamento de uma obra, o que seria de grande valia quando se pensa em termos de economia nas atividades de trabalho da engenharia civil.

## REFERÊNCIAS

ADELI, Hojjat; SARMA, Kamal. **Cost optimization of structures: fuzzy logic, genetic algorithms, and parallel computing**. John Wiley & Sons, Ltd. England, 2006.

ARORA, J.S. **Introduction to Optimum Design**, McGraw-Hill, Inc., New York, 1989.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**. Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

\_\_\_\_\_. **NBR 6023: Informação e documentação – Referências – Elaboração**. Rio de Janeiro, 2002.

\_\_\_\_\_. **NBR 6024: Informação e documentação – Numeração progressiva das seções de um documento escrito – Apresentação**. Rio de Janeiro, 2003.

\_\_\_\_\_. **NBR 10520: Informação e documentação – Citações em documentos – Apresentação**. Rio de Janeiro, 2002.

\_\_\_\_\_. **NBR 14724: Informação e documentação – Trabalhos acadêmicos – Apresentação**. Rio de Janeiro, 2011.

BARROS, C. **Concepção Estrutural**, 2011. Disponível em <<https://edificacoes.files.wordpress.com/2011/06/aula-x-elementos-estruturais.pdf>>. Acesso em: 13 de março de 2018.

CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L.M. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. 2. ed. São Paulo: Pini, 2013.

COELLO, C.A.; ALONSO, F.A. **Optimal design of axially loaded non-prismatic columns via genetic algorithms**. Tulane University. EUA, 2005.

COLEY, David A. **An Introduction to Genetic Algorithms for Scientists and Engineers**. University of Exeter. England. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998.

DORAN, R.W. **The Gray Code**. Journal of Universal Computer Science. v. 13. p. 1573-1597. The University of Auckland, New Zealand. 2007.

EULER, L. **Euler's calculation of buckling loads for columns of non uniform section. In the Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies**. Orell Füssli Turici, Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae. 1757.

FARIA, F. A. **Inteligência Artificial: Além da busca clássica**, 2015. Disponível em: <<http://www.ic.unicamp.br/~ffaria/ia1s2015/class04/class04b-Alemdabuscaclassica.pdf>>. Acesso em: 13 de março de 2018.

FU, K. C.; REN, D. **Optimization of axially loaded non-prismatic column: Computers and Structures**. 1992.

GOLDBERG, Edward D. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning**. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.

HIBBELER, Russell C. **Resistência dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

HELENE, Paulo; ANDRADE, Tibério. **Concreto de Cimento Portland**. In: ISAIA, G.C. (Org.). **Concreto, Ensino, Pesquisa e Realizações**. 1. ed. São Paulo: IBRACON, 2010. cap. 29, p 905-944.

HOLLAND, John H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence**. 2. ed. The MIT Press, 1992.

KORZA, John R. **Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selections**. The MIT Press. 1992.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 3. ed. v. 1. São Paulo: Harbra, 1994.

LEVEQUE, R.J. **Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems**. Ssam. Washington: EUA, 1955.

Manual de Estilo Acadêmico – **Trabalhos de Conclusão de Curso, dissertações e teses**. UFBA – 5. ed. Salvador, 2013.

MICHALEWICZ, Zbigniew. **Genetic algorithms + data structures = evolution programs**. Springer. New York: EUA, 1992.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. Volume Único. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2005.

PEDRESCHI, Remo. **A preliminary study of the strength of non-prismatic columns using fabric formwork**. Proceedings of the International Society of Flexible Formwork (ISOFF) Symposium. Amsterdam: Netherlands, 2015.

PINHEIRO, L.M; MUZARDO, C. D; SANTOS, S. P. **Fundamentos de concreto e projeto de edifícios**. São Paulo, 2007. cap. 1, p. 1-9.

PINHEIRO, L.M; Scadelai M.A. **Fundamentos de concreto e projeto de edifícios**. São Paulo, 2005. cap. 16, p. 219-222.

ROSA, C. F. **Série de Taylor e Aplicações**. UFSC. Santa Catarina. 2013. cap. 3, p. 52-54.

SIVANANDAM, S.N; DEEPA, S.N. **Introduction to Genetic Algorithms**. Springer. New York. 2008.

TADJBAKHSI, I. KELLER, J. **Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues**. Journal of Applied Mechanics. 1962.

## APÊNDICE A – Dedução da equação diferencial finita

Equação que governa os problemas de estruturas submetidas a carregamentos axiais de compressão ao longo do eixo. COELO (2005)

$$EIy'' + Py = 0$$

A equação do problema é uma equação diferencial de segunda ordem e pode ser expandida por série de Taylor para a formação de uma equação diferencial finita de segunda ordem como mostrado abaixo.

$$df = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} \Rightarrow df2 = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$$

Substituindo a segunda derivada de f(x) na equação do problema obtém-se:

$$EI df2 + Py_i = 0 \Rightarrow \frac{EI(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})}{h^2} + Py_i = 0$$

De acordo com o modelo de Coello (005) as equações de contorno inicial para o problema descrito são:

$$y_1 = 0; y_3 = y_5 \text{ ou } y_1 = 0; y_3 = y_5$$

O índice i fornece os pontos pertencentes à estrutura do pilar apresentada onde será aplicada a função mostrada.

Para i=2:

$$\frac{EI_2y_{2-1} - 2EI_2y_2 + EI_2y_{2+1}}{h^2} + Py_2 = 0$$

$$\frac{-2EI_2y_2 + EI_2y_3}{h^2} + Py_2 = 0$$

Para i=3:

$$\frac{EI_3y_{3-1} - 2EI_3y_3 + EI_3y_{3+1}}{h^2} + Py_3 = 0$$

$$\frac{EI_3y_2 - 2EI_3y_3 + EI_3y_4}{h^2} + Py_3 = 0$$

Para  $i=4$ :

$$\frac{EI_4 y_{4-1} - 2EI_4 y_4 + EI_4 y_{4+1}}{h^2} + P y_4 = 0$$

$$\frac{2EI_4 y_3 - 2EI_4 y_4}{h^2} + P y_4 = 0$$

Os termos obtidos podem ser ordenados como esquematizado abaixo.

$$\frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} -2I_2 & I_2 & \mathbf{0} \\ I_3 & -2I_3 & I_3 \\ \mathbf{0} & 2I_4 & -2I_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Resolvendo a equação matricial tem-se:

$$\frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} -2I_2 y_2 + I_2 y_3 + 0 \\ I_3 y_2 + (-2I_3 y_3 + I_3 y_4) \\ 2I_4 y_3 - 2I_4 y_4 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} I_2(-2y_2 + y_3) \\ I_3(y_2 - 2y_3 + y_4) \\ I_4(2y_3 - 2y_4) \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{E}{h^2} [I_2(-2y_2 + y_3)] + P y_2 = 0 \\ \frac{E}{h^2} [I_3(y_2 - 2y_3 + y_4)] + P y_3 = 0 \\ \frac{E}{h^2} [I_4(2y_3 - 2y_4)] + P y_4 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo as equações a partir do mínimo múltiplo comum obtêm-se:

$$\begin{cases} EI_2(-2y_2 + y_3) + Ph^2 y_2 = 0 \\ EI_3(y_2 - 2y_3 + y_4) + Ph^2 y_3 = 0 \\ EI_4(2y_3 - 2y_4) + Ph^2 y_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} EI_2(-2y_2 + y_3) = -Ph^2 y_2 \\ EI_3(y_2 - 2y_3 + y_4) = -Ph^2 y_3 \\ EI_4(2y_3 - 2y_4) = -Ph^2 y_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-2y_2 + y_3) = \frac{-Ph^2y_2}{EI_2} \\ (y_2 - 2y_3 + y_4) = \frac{-Ph^2y_3}{EI_3} \\ (2y_3 - 2y_4) = \frac{-Ph^2y_4}{EI_4} \end{cases}$$

Ordenando as equações a partir dos termos comuns  $y_2$ ,  $y_3$  e  $y_4$  obtém-se:

$$\begin{cases} \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_2}\right)y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 + \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_3}\right)y_3 + y_4 = 0 \\ 2y_3 + \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_4}\right)y_4 = 0 \end{cases}$$

O sistema obtido pode ser reescrito como:

$$\begin{vmatrix} \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_2}\right) & 1 & 0 \\ 1 & \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_3}\right) & 1 \\ 0 & 2 & \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_4}\right) \end{vmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando o determinante obtém-se:

$$\begin{vmatrix} \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_2}\right) & 1 & 0 \\ 1 & \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_3}\right) & 1 \\ 0 & 2 & \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_4}\right) \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante da matriz pela regra dos cofatores chega-se à forma linear para a equação governante do problema.

$$\begin{aligned} & \left[ \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_2}\right) \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_3}\right) \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_4}\right) \right] - \left[ 2x1x \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_2}\right) + \left(-2 + \frac{Ph^2}{EI_4}\right) x1x1 \right] \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\left[ \left( 4 - 2 \frac{Ph^2}{EI_3} - 2 \frac{Ph^2}{EI_2} + \frac{P^2h^4}{EI_2I_3} \right) \left( -2 + \frac{Ph^2}{EI_4} \right) \right] - \left[ \left( -4 + \frac{2Ph^2}{EI_2} - 2 + \frac{Ph^2}{EI_4} \right) \right] = 0$$

$$-8 + 4 \frac{Ph^2}{EI_4} + 4 \frac{Ph^2}{EI_3} - 2 \frac{P^2h^4}{E^2I_3I_4} + 4 \frac{Ph^2}{EI_2} - 2 \frac{P^2h^4}{E^2I_2I_4} - 2 \frac{P^2h^4}{E^2I_2I_3} + \frac{P^3h^6}{E^3I_2I_3I_4} + 6 - 2 \frac{Ph^2}{EI_2} - \frac{Ph^2}{EI_4} = 0$$

$$-2 + 3 \frac{Ph^2}{EI_4} + 2 \frac{Ph^2}{EI_2} + \frac{P^3h^6}{E^3I_2I_3I_4} - 2 \frac{P^2h^4}{E^2} \left( \frac{1}{I_2I_3} + \frac{1}{I_2I_4} + \frac{1}{I_3I_4} \right) + 4 \frac{Ph^2}{EI_3} = 0$$

$$\frac{P^3h^6}{E^3I_2I_3I_4} - 2 \frac{P^2h^4}{E^2} \left( \frac{1}{I_2I_3} + \frac{1}{I_3I_4} + \frac{1}{I_2I_4} \right) + \frac{Ph^2}{E} \left( \frac{2}{I_2} + \frac{4}{I_3} + \frac{3}{I_4} \right) - 2 = 0$$

## APÊNDICE B – Parâmetros de entrada do algoritmo genético

Optimal design of axially loaded non-prismatic columns via genetic algorithms  
C. A. Coello Coello and F. A. Alonso Farrera

PSIZE	NUNKNO	SUBLEN	MAXG	CP	SCALEC	ELT
40	4	12	700	0.8	2	1
INDIV	LINF.	LSUP.				
1	6.9	12.0				
2	6.9	12.0				
3	6.9	12.0				
4	6.9	12.0				
SEÇÃO	B	L				
1	0	122.0				
TENSAOL	PA	E	PEN	TOLER		
4.35	154.643	1800.000	.01	1		

### APÊNDICE C – Tela de entrada de dados do programa

```
C:\Users\Lucas Ribeiro\Documents\UFOB\12º Semestre\TCC\TCC Codigo genetico\TCC - Avançad...
PROGRAMA OTIMIZACAO DE VOLUME DE UM PILAR - NOVO
NOME ARQ. ENTRAD. DE DADOS ?
case11.dat
NOME ARQ. IO DE RESULTADOS ?
case11.out
NOME ARQ. IO GRAFICA ? <MAX 16 CHAR>
case11.txt_
```

### APÊNDICE D – Tela de saída de dados do programa

```
C:\Users\Lucas Ribeiro\Documents\UFOB\12º Semestre\TCC\TCC Codigo genetico\TCC - Avançad...
39      11.28513
39      8.91883
39      9.90022
39      8.97363
40      7.97231
40      10.44198
40      7.82161
40      7.06066
ELITE

          VOLUME                MEDIA
        20085.533             39160.156

VARIABLES DESCONHECIDAS

Di.     VALOR      FS      CHK1     CHK2
1       7.97231     .7122   .3996    .0000
2       10.4420     .4151   .3996    .0000
3       7.82161     .7399   .3996    .0000
4       7.06066     .9079   .3996    .0000
PROCESSO DE SELECAO          GERACAO: 5
```